# Rekenen bij de Oude Grieken

## Informatieblad

De Oudgriekse beschaving was nogal versnipperd in verschillende stadstaten. Ze kenden dan ook verschillende systemen voor het noteren van getallen.
Vanaf 300 v.Chr. gebruikten de Oude Grieken het **Ionische systeem**. In dat systeem werden Griekse kleine letters (en nog drie oudere tekens omdat het Griekse alfabet maar 24 letters kent) gebruikt om getallen aan te duiden:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 α | 2 β | 3 γ | 4 δ | 5 ε | 6 ς | 7 ζ | 8 η | 9 θ |
| 10 ι | 20 κ | 30 λ | 40 μ | 50 ν | 60 ξ | 70 ο | 80 π | 90 ϟ |
| 100 ρ | 200 σ | 300 τ | 400 υ | 500 φ | 600 χ | 700 ψ | 800 ω | 900 ϡ |
| 1000 ,α | 2000 ,β | 3000 ,γ | 4000 ,δ | 5000 ,ε | 6000 ,ς | 7000 ,ζ | 8000 ,η | 9000 ,θ |

Ook met deze symbolen werden getallen gemaakt door ze achter elkaar te schrijven. Verder werd het verschil tussen een woord en een getal gemaakt door boven de getallen een streep te trekken, ofwel door een getal aan te geven met een accent:
ιγ' = 13
ξε' = 65
,γψλη' = 3738
,εη' = 5008

Bij een dergelijke schrijfwijze is de plaats van een symbool niet van belang: het Griekse getallenstelsel was geen positiestelsel zoals het onze. Ook een teken voor nul was daarom niet nodig. Het zou in feite nog een aantal eeuwen duren voordat zo'n symbool werd bedacht.

**Rekenen:** Doe je net als nu, maar met de Griekse symbolen.
**Breuken:** Maak je door getallen boven elkaar te zetten, de noemer boven de teller. B.v. $\frac{2}{3} = \frac{\gamma}{\beta}$
**Grote getallen:** Voor 10.000 werd de M gebruikt en daarboven zetten de Oude Grieken dan om hoeveel tienduizendtallen het ging. B.v. $130000 = \overset{\iota\gamma}{M}$

# Rekenen bij de Oude Grieken

## Werkblad

**Opgave 1:**
Schrijf deze getallen in het Ionische systeem:
**a)** 23
**b)** 107
**c)** 227
**d)** 8256
**e)** 769.305
**f)** 3/5
**g)** 328/507

**Opgave 2:**
Schrijf deze Oudgriekse getallen in onze moderne notatie:
**a)** λε
**b)** κα
**c)** φξς
**d)** ,εχοη
**e)** $\overset{\pi\varepsilon}{M}$,ςπγ
**f)** $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu\alpha}{\lambda\varepsilon}$
**g)** $\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega\pi\gamma}{\lambda\zeta}$

**Opgave 3:**
Tel op:
**a)** κα en υξα en οε
**b)** ,αχξθ en $\overset{\varepsilon}{M}$,εφλβ

**Opgave 4:**
Trek van νξα het getal οε af.

**Opgave 5:**
Vermenigvuldig φμη met ιν.

**Opgave 6 (puzzel):**
Over de Oudgriekse filosoof en wiskundige Diophantos werd later geschreven: ... zijn jeugd duurde 1/6 deel van zijn leven, hij trouwde na nog eens 1/7 deel; zijn baard groeide na weer 1/12 deel en zijn zoon werd 5 jaar daarna geboren; die zoon leefde de helft van zijn vader's leven en de vader stierf 4 jaar na de zoon. Hoe oud is Diophantos geworden?

***Alleen voor de bovenbouw:***

**Opgave 7:**
Voor de Oude Grieken waren wortels die niet op een geheel getal of een breuk uitkwamen echte “onmeetbare” getallen.
Ze konden lijnstukken construeren die dergelijke lengtes hebben, maar nooit precies berekenen hoe lang die lijnstukken zijn.

**a)** Hoe kun je $\sqrt{2}$construeren (denk aan de stelling van Pythagoras)?
**b)** Hoe kun je $\sqrt{3}$construeren?
**c)** Hoe kun je $\sqrt{13}$construeren?

Je kunt bewijzen, dat $\sqrt{2}$geen breuk kan zijn. Dat doe je door aan te nemen dat dit WEL zo is en dan daaruit af iets af te leiden dat onmogelijk waar kan zijn.

**d)** Probeer dit bewijs te leveren.

# Rekenen bij de Oude Grieken

**Antwoorden:**

**Opgave 1:**

**a)** κγ
**b)** ρζ
**c)** σκζ
**d)** ,ησνς
**e)** $\overset{o\varsigma}{M}$,θτε
**f)** $\begin{matrix}\varepsilon\\ \gamma\end{matrix}$
**g)** $\begin{matrix}\phi\zeta\\ \tau\kappa\eta\end{matrix}$

**Opgave 2:**

**a)** 35
**b)** 21
**c)** 566
**d)** 5678
**e)** 856.083
**f)** 35/41
**g)** 37/883

**Opgave 3:**

**a)** φνζ
**b)** $\overset{\varepsilon}{M}$,ζσα

**Opgave 4:**

τπς

**Opgave 5:**

ηωξδ

**Opgave 6:**

Diophantos is πδ jaar oud geworden.

**Opgave 7:**

**a)** Teken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 1 cm.
**b)** Zet op de schuine zijde van de driehoek bij a een nieuwe rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van $\sqrt{2}$ en 1.
**c)** Teken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 3 en 2.
**d)** Praat met je docent.

# Rekenen in het Romeinse Rijk

## Informatieblad

De Romeinen gebruikten letters als symbolen voor 1, 5, 10, 50, 100, 500 en 1000. En ze combineerden deze letters om de andere (natuurlijke) getallen te kunnen maken. En tot op heden wordt dit systeem gebruikt:
I of i voor 1
V of v voor 5
X of x voor 10
L of l voor 50
C of c voor 100
D of d voor 500
M of m voor 1000

Door te combineren maak je getallen: 2 wordt II, 3 wordt III, 4 wordt IV, 6 wordt VI, 7 wordt VII, 8 wordt VIII, 9 wordt IX, etc. En bijvoorbeeld 2006 is MMVI. Bij heel grote getallen als 5000 wordt V gebruikt, een streepje onder de letter.
Bij een dergelijke schrijfwijze is de plaats van een symbool niet van belang: het Romeinse getallenstelsel is geen positiestelsel zoals ons normale decimale stelsel. Ook een teken voor nul is niet nodig.
Wel speelt volgorde een zekere rol: IV is wat anders dan VI en XL is wat anders dan LX. De Romeinen gebruikten (om het aantal tekens per getal te verminderen) de regel dat een teken met een lagere waarde dat vooraf gaat aan een teken met een hogere waarde ervan moet worden afgetrokken in plaats van erbij opgeteld: IV = V – I terwijl VI = V + I.
Deze regel blijkt buitengewoon onhandig te zijn bij het rekenen met getallen in de Romeinse schrijfwijze.

**Optelling** van 141 en 24:
CXLI + XXIV = CXXXXI + XXIIII = CXXXXXXIIIII = CLXV

**Aftrekking** van 141 en 24:
CXLI – XXIV = CXXXXI – XXIIII = CXXXVIIIIII – XXIIII = CXVII

**Vermenigvuldigen** doe je door herhaald optellen.

**Delen** doe je door herhaald aftrekken. Als een deling niet uitkomt, blijft er een rest over.

# Rekenen in het Romeinse Rijk

## Werkblad

**Opgave 1:**
Schrijf deze getallen in Romeinse cijfers:
**a)** 23
**b)** 107
**c)** 229
**d)** 8256
**e)** 769.305

**Opgave 2:**
Schrijf deze Romeinse getallen in onze moderne notatie:
**a)** XXXIV
**b)** DCCLIII
**c)** $\underline{\text{V}}$MMMM
**d)** $\underline{\text{XC}}$XCIX
**e)** $\underline{\text{CC}}$DXI

**Opgave 3:**
Bereken:
**a)** MMIV + XXXIX
**b)** MMIV – XXXIX

**Opgave 4:**
Bereken:
**a)** XXIV keer VI
**b)** LIV gedeeld door VI
**c)** MCCIX keer XIV
**d)** CDXXXII gedeeld door XVIII

**Opgave 5:**
Waarom is het werken met Romeinse cijfers erg onhandig bij het rekenen? (De Romeinen stelden dan ook op het gebied van de wiskunde niks voor.)

**Opgave 6 (puzzel):**
Een rijk patriciër sterft en laat 17 paarden na die onder zijn drie erfgenamen moeten worden verdeeld volgens de verhouding $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$ .
Hoe is dat mogelijk?

# Rekenen in het Romeinse Rijk

**Antwoorden:**

**Opgave 1:**
Schrijf deze getallen in Romeinse cijfers:
**a)** XXIII
**b)** CVII
**c)** CCXXIX
**d)** $\underline{\text{V}}$MMMCCLVI
**e)** $\underline{\text{DCCLXIX}}$CCCV

**Opgave 2:**
Schrijf deze Romeinse getallen in onze moderne notatie:
**a)** 24
**b)** 753
**c)** 9000
**d)** 90909
**e)** 201011

**Opgave 3:**
Bereken:
**c)** MMXXXXIII
**d)** MCMLXV

**Opgave 4:**
Bereken:
**e)** CXLIV
**f)** IX
**g)** $\underline{\text{XV}}$MDCDXXVI (16926)
**h)** XXIV

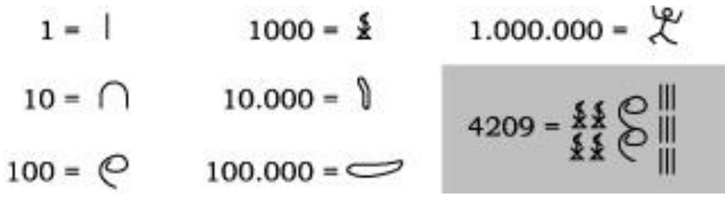
**Opgave 5:**
Bijvoorbeeld omdat er vaak veel tekens nodig zijn en je (let op het verschil tussen IX en XI) toch nog goed op de volgorde moet letten.

**Opgave 6 (puzzel):**
Leen een extra paard en dan krijgen de erfgenamen 9, 6 en 2 paarden. Dat is in totaal 17 paarden en dan kan het geleende paard dus gewoon weer terug naar de eigenaar.

# Rekenen in het Oude Egypte

## Informatieblad 1

De Oude Egyptenaren kenden symbolen voor 1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000 en 1.000.000. Met deze symbolen werden getallen gemaakt. Vaak schreven de Egyptenaren hun getallen van rechts naar links. In hun hiëroglyfen zag dat er zo uit:




Bij een dergelijke schrijfwijze is de plaats van een symbool niet van belang: het Egyptische getallenstelsel was geen positiestelsel zoals het onze. Ook een teken voor nul was daarom niet nodig. Het zou in feite nog vele eeuwen duren voordat zo'n symbool werd bedacht.

### Optellen en aftrekken

Optellen is in het Oudegyptische getallenstelsel heel eenvoudig: je gooit van beide getallen gewoon alle symbolen op één hoop. Daarbij worden 10 eenheden één tiental, 10 tientallen één honderdtal, etc.
Als ze twee getallen van elkaar moesten aftrekken dan deden de Egyptenaren dat door het kleinste van de twee aan te vullen tot het grootste. De uitkomst van 4209 – 327 vonden ze dus door 327 aan te vullen tot 4209 was bereikt.

### Vermenigvuldigen en delen

De Oude Egyptenaren konden niet vermenigvuldigen zoals wij dat tegenwoordig doen: ze kenden immers ons tientallig stelsel niet. Ze werkten met verdubbelen en halveren en bij elkaar tellen. Hier zie je hoe dat gaat:

18 · 35 = 70 + 560 = 630

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 35 | verdubbelen |
| * | 2 | 70 | verdubbelen |
| | 4 | 140 | verdubbelen |
| | 8 | 280 | verdubbelen |
| * | 16 | 560 | |

optellen

630 / 18 = 32 + 2 + 1 = 35

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | 1 | 18 | verdubbelen |
| * | 2 | 36 | verdubbelen |
| | 4 | 72 | verdubbelen |
| | 8 | 144 | verdubbelen |
| | 16 | 288 | verdubbelen |
| * | 32 | 576 | |

optellen: 576 + 36 + 18 = 630

Bij delen werkten de Oude Egyptenaren op vergelijkbare wijze als bij aftrekken. Stel je voor dat je 630 / 18 wilt uitrekenen. In het Oude Egypte ging je dan met 18 aan het verdubbelen en optellen tot je op 630 uitkwam.

# Rekenen in het Oude Egypte

## Werkblad 1

**Opgave 1:**
Schrijf deze getallen in hiëroglyfen:
**a)** 53
**b)** 407
**c)** 2136
**d)** 12345

**Opgave 2:**
Schrijf deze getallen (in hiëroglyfen) in onze moderne notatie:
**a)** 
**b)** 
**c)** 

**Opgave 3:**
Tel in hiëroglyfen op:
 en 

**Opgave 4:**
Trek in hiëroglyfen van elkaar af:
 en 

**Opgave 5:**
Waarom gaat in het Oudegyptische hiëroglyfensysteem vermenigvuldigen met 10 wel gemakkelijk? Hoe gaat het dan?

**Opgave 6:**
Nu gebruik je de gewone notatie, maar reken je als iemand uit het Oude Egypte. Dus verdubbelen, halveren en zo…
Bereken:
**a)** 74 x 64
**b)** 58 x 692
**c)** 129 x 413
**d)** 360 / 24
**e)** 238 / 17
**f)** 405 / 9

# Rekenen in het Oude Egypte

**Antwoorden:**

**Opgave 1:**
Even bij elkaar checken.

**Opgave 2:**
**a)** 20507
**b)** 2.105.00
**c)** 5020

**Opgave 3:**
9608 + 507 = 10115 (en dan in hiëroglyfen)

**Opgave 4:**
9608 – 507 = 9101 (en dan in hiëroglyfen)

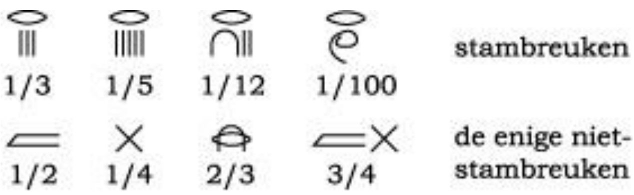
**Opgave 5:**
Je kunt dan gewoon alle symbolen vervangen door het symbool dat net ééntje hoger zit.

**Opgave 6:**
**a)** 4736
**b)** 40136
**c)** 53277
**d)** 15
**e)** 14
**f)** 45

# Rekenen in het Oude Egypte

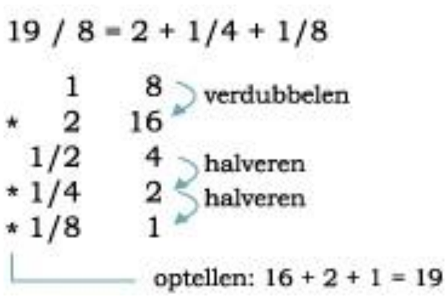
## Informatieblad 2

**Breuken**
Als een deling niet uit kwam (er bleef een ondeelbare rest over) werkten de Oude Egyptenaren met breuken. Alleen kenden zij geen breuken zoals wij, zij werkten vrijwel alleen met zogenaamde **stambreuken**. Stambreuken zijn breuken waarvan de teller 1 is, zoals 1/2, 1/3, 1/4, etc. De enige andere breuken die de Egyptenaren gebruikten waren 2/3 en 3/4.
Zij noteerden stambreuken door een 'open mond' boven de noemer te zetten. Voor enkele breuken bestonden speciale schrijfwijzen.




De wiskundige J.J. Sylvester (1814 - 1897) bewees vele eeuwen later dat elke breuk kan worden geschreven als de som van een aantal stambreuken. Hij ontwierp een eenvoudige manier waarmee elke breuk als som van stambreuken kan worden geschreven. Daarbij trek je telkens van de breuk die je wilt omzetten in een som van stambreuken een zo groot mogelijke stambreuk af. Bijvoorbeeld:
13/20 = 1/2 + 3/20 = 1/2 + 1/7 + 1/140.

Bij het delen (vooral bij delingen die niet 'uitkomen') gebruikten de Oude Egyptenaren verdubbelen en halveren. Hier zie je bijvoorbeeld (het is opgave 24 van de Rhind papyrus) hoe ze 19 deelden door 8:




Je ziet dat de Egyptenaren vaak werkten met de rij 1/2, 1/4, 1/8, ...
Maar daarmee konden niet alle delingen worden gemaakt!
Daarom werden ook wel andere rijen gebruikt.
Bijvoorbeeld: 2/3, 1/3, 1/6, 1/12, ...
Deze rij ontstaat door eerst 2/3 deel te nemen en dan te halveren. Als je bijvoorbeeld 20/24 wilt uitrekenen is dit een goede aanpak.

# Rekenen in het Oude Egypte

## Werkblad 2

**Opgave 1:**
Bereken op de manier van iemand in het Oude Egypte:
**a)** 26/20
**b)** 71/21
**c)** 13/36

**Opgave 2:**
Schrijf als een som van stambreuken:
**a)** 9/20
**b)** 4/15
**c)** 335/336

---

***Alleen voor de bovenbouw:***

**Opgave 3:**
Er zijn verschillende manieren om van breuken een som van stambreuken te maken. Dit is er één van:
Als *m* een oneven getal is, dan geldt: $\frac{2}{m} = \frac{1}{m \cdot \frac{1}{2}(m+1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}(m+1)}$.
**a)** Laat zien dat dit waar is voor $m$ = 3, 5, 7.
**b)** Bewijs deze regel.
**c)** Waarom geldt dit niet als $m$ even is?
**d)** Kun je hiermee ook van 4/5 een som van stambreuken maken?

**Opgave 4:**
Als *n* een positief geheel getal is, geldt: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.
**a)** Laat zien dat dit waar is voor $n$ = 2, 3, 4.
**b)** Bewijs ook deze rekenregel.

**Opgave 5 (puzzel):**
Bereken (dus schrijf als som van stambreuken): 5/17.

# Rekenen in het Oude Egypte

**Antwoorden:**

**Opgave 1:**
**a)** 1 + ¼ + 1/20
**b)** 3 + 1/3 + 1/21
**c)** 1/3 + 1/36

**Opgave 2:**
**a)** 1/4 + 1/5
**b)** 1/5 + 1/15
**c)** 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/14 + 1/336

**Opgave 3:**
**a)** Zelf nagaan.
**b)** Breuken gelijknamig maken en optellen.
**c)** Omdat dan $\frac{1}{2}(m+1)$ geen geheel getal is.
**d)** $\frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{2}{5} = 2 \cdot (\frac{1}{15} + \frac{1}{3}) = \frac{2}{15} + \frac{2}{3}$ en daarna doe je dit nog een keer.

**Opgave 4:**
**a)** Zelf nagaan.
**b)** Breuken gelijknamig maken en optellen.

**Opgave 5:**
Je vindt na veel gepuzzel: 5/17 = ¼ + 1/34 + 1/68.