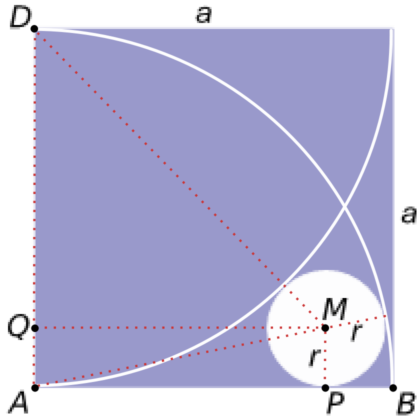
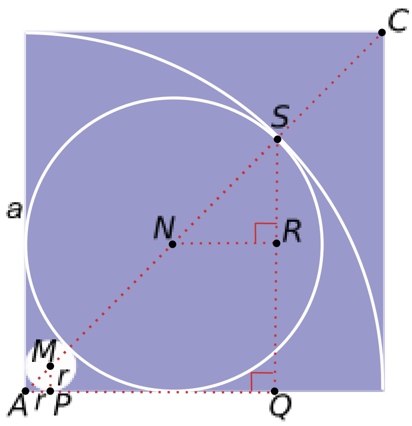
Oplossingen sangaku's math4all site

1 – cirkel raakt kwart cirkels



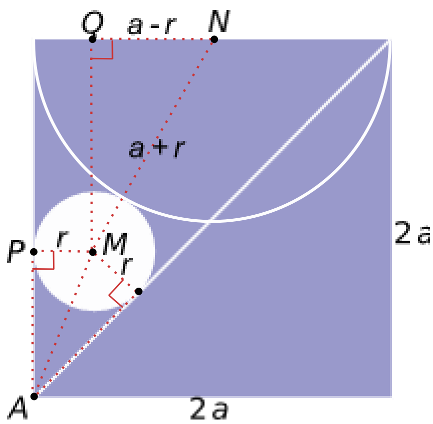
De zijden van het vierkant zijn a.
Bekijk de figuur, de gekozen letters en de gekozen rechthoekige driehoeken. Ga na, dat $DM = a + r$ en $AM = a - r = DQ$.
Hieruit volgt:
$AP^2 = (a-r)^2 - r^2 = a^2 - 2ar$
en
$AP^2 = QM^2 = (a+r)^2 - (a-r)^2 = 4ar$
Hieruit volgt:
$a^2 - 2ar = 4ar$ en dus $r = \frac{1}{6}a$.
De oppervlakte van de kleine witte cirkel is dus: $\frac{1}{36}\pi a^2$.

2 – cirkel raakt cirkel in kwart cirkel



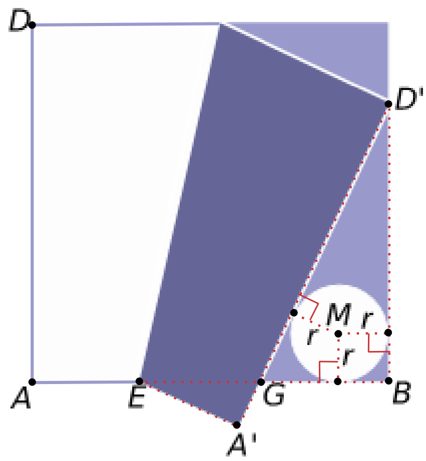
In de figuur is $AC = a\sqrt{2}$ en $AS = a$.
Dan is $AQ = QS = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.
Noem de straal van de cirkel die de kwart cirkel raakt x.
Dan is $NS = x$ en dus $NR = RS = \frac{1}{2}x\sqrt{2}$.
Dus is $AQ = x + \frac{1}{2}x\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ zodat $x = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}a$.
Verder is $AM = r\sqrt{2}$.
Dit levert op: $AS = a = r + r\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}a$.
En hieruit volgt uiteindelijk: $r = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2} \cdot a$.
En daarmee is de oppervlakte van de kleine cirkel te berekenen.

3 – cirkel raakt halve cirkel en lijn



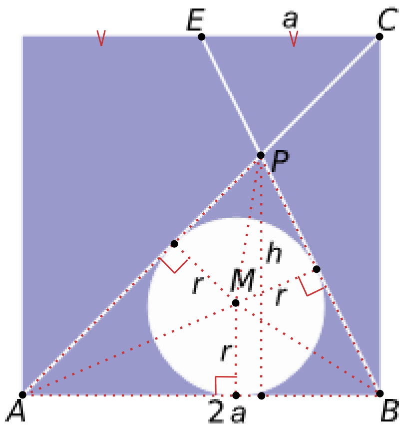
De zijden van het vierkant zijn $2a$.
Bekijk de figuur, de gekozen letters en de gekozen rechthoekige driehoeken.
Ga na, dat $QN = a - r$ en $NM = a + r$.
$QM = \sqrt{(a+r)^2 - (a-r)^2} = \sqrt{4ar}$
$AP = \frac{r}{\tan(22{,}5°)}$
Verder is $AP = 2a - QM = 2a - \sqrt{4ar}$
Dus is: $2a - \sqrt{4ar} = \frac{r}{\tan(22{,}5°)}$
Hieruit is r te berekenen (uit te drukken in a).
En daarmee bereken je de oppervlakte van de kleine witte cirkel.

4 – cirkel raakt omgevouwen vierkant



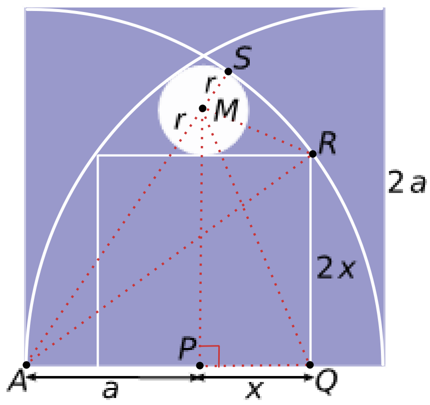
Het omvouwen van het vierkant kan op verschillende manieren gebeuren. Neem x voor de zijde van het uitstekende driehoekje $EA'G$ die het dichtst bij de witte cirkel ligt, dus voor $A'G$.
Merk allereerst in $\Delta GBD'$ op dat $GD' = GB - r + D'B - r$.
Dit betekent dat $r = \frac{GB+D'B-GD'}{2}$.
Verder is $\Delta GA'E$ gelijkvormig met $\Delta GBD'$.
Teken je in $\Delta GA'E$ net zo'n ingeschreven cirkel als in $\Delta GBD'$, dan zijn de verhoudingen van de straal R ervan tot de zijden gelijk aan die verhoudingen in $\Delta GBD'$.
Dus: $\frac{r}{GB} = \frac{R}{GA'}$ en $\frac{r}{GD'} = \frac{R}{EG}$.
Dit levert op: $r(EG - GA') = R(GD' - GB)$.
Nu is: $GD' - GB = (a - x) - \left(a - (AE + EG)\right) = AE + EG - x = EA' + EG - x$.
En ook: $EG - GA' = EG - x$.
Ook geldt ook in $\Delta GAE'$ dat $R = \frac{AE'+GA'-EG}{2} = \frac{EA'+x-EG}{2}$.
Dus: $r(EG - x) = \frac{EA'+x-EG}{2}(EA' + EG - x) = \frac{1}{2}(2x \cdot EG - x^2 - (EG^2 - (EA')^2))$.
Volgens de stelling van Pythagoras is $EG^2 - (EA')^2 = (GA')^2 = x^2$.
Daarmee kun je $r(EG - GA') = R(GD' - GB)$ omschrijven naar:
$r(EG - x) = \frac{1}{2}(2x \cdot EG - 2x^2) = x(EG - x)$
En daarom is $x = r$.

5 – cirkel in gelijkzijdige driehoek in cirkel



De twee driehoeken ABP en CEP zijn gelijkvormig. Alle afmetingen van ΔABP zijn twee keer zo groot dan die van ΔCEP.
Dus de hoogte van ΔABP is $h = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4}{3}a$.
En $AP = \frac{2}{3}\sqrt{8a^2} = \frac{4}{3}a\sqrt{2}$ en $BP = \frac{2}{3}\sqrt{5a^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{5}$.
Werk vervolgens met oppervlaktes: de drie driehoeken waarin ΔABP wordt verdeeld door de lijnstukken vanuit M naar elk van de hoekpunten hebben alle drie de hoogte r.
En met zijn drieën vormen ze de driehoek ΔABP.
Hieruit volgt:
$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{4}{3}a = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}a\sqrt{2} \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{5} \cdot r$
En dus:
$8a = 6r + 4r\sqrt{2} + 2r\sqrt{5}$ en dit geeft: $r = \frac{4a}{3+2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.
En daarmee kun je de oppervlakte van de witte cirkel in a uitdrukken.

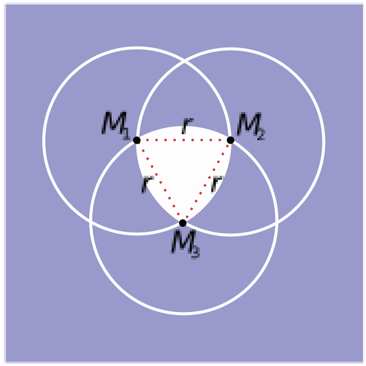
6 – vierkant met twee kwart cirkels om een kleiner vierkant en kleine cirkel erin



In ΔAQR is $AQ^2 + QR^2 = AR^2$ dus:
$(a + x)^2 + (2x)^2 = (2a)^2$
Dit geeft: $5x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$.
En dus $x = 0{,}6a$ (het andere antwoord vervalt).

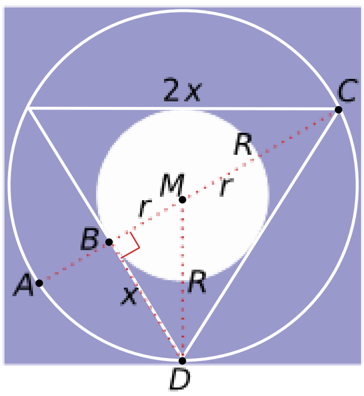
In ΔAPM is $AP^2 + PM^2 = AM^2$ dus:
$a^2 + (1{,}2a + r)^2 = (2a - r)^2$
En dit geeft $r = \frac{39}{160}a$.
En dus is de oppervlakte van de witte cirkel $\frac{1521}{25600}\pi a^2$.

7 - drie cirkels door elkaars middelpunten



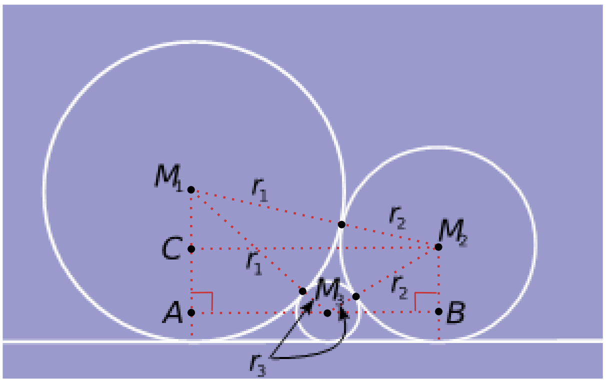
De driehoek $M_1M_2M_3$ is gelijkzijdig met zijden van lengte r en hoeken van 60°.
De oppervlakte van zo'n driehoek is $\frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$.
De gevraagde oppervlakte bestaat uit drie overlappende cirkelsectoren. Dus die oppervlakte is gelijk aan drie keer de oppervlakte van zo'n cirkelsector minus twee keer de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek.
Die oppervlakte is daarom:
$3 \cdot \frac{60}{360} \cdot \pi r^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})r^2$

8 - cirkel met gelijkzijdige driehoek en zijn ingeschreven cirkel



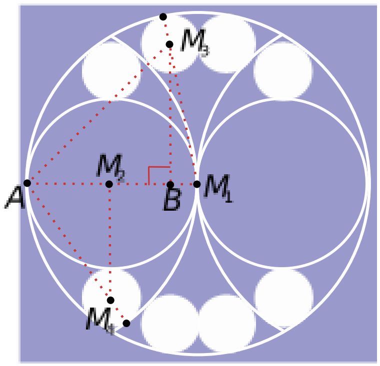
Omdat $AC = 2R$ en $BC = R + r = x\sqrt{3}$ (de hoogte van de gelijkzijdige driehoek in de figuur), vind je:
$x = \frac{R+r}{\sqrt{3}}$.
In ΔBDM geldt: $R^2 = x^2 + r^2$, zodat:
$R^2 = \left(\frac{R+r}{\sqrt{3}}\right)^2 + r^2$.
Dit levert op: $r^2 + Rr - R^2 = 0$ zodat $r = \frac{1}{2}R$.
(Het andere antwoord vervalt.)
De oppervlakte van de witte cirkel is dus $\frac{1}{4}\pi R^2$.

9 - drie cirkels op één raaklijn die elkaar ook raken



Gebruik de stelling van Pythagoras:
$AB = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 + (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2$
Dit geeft $AB = 4r_1r_3 + 4r_2r_3$.
En ook:
$AB = CM_2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$
Dit geeft $AB = 4r_1r_2$.
Dus $4r_1r_3 + 4r_2r_3 = 4r_1r_2$.
Dit kun je (door delen) schrijven als: $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3}$.

10 – pauwenstaart???



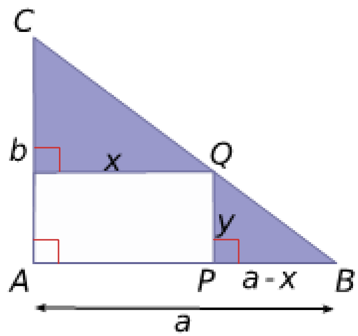
Neem $M_1A = R$ en stel de straal van de cirkel met middelpunt M_3 gelijk aan r.
Gebruik de stelling van Pythagoras in de driehoeken ABM_3 en BM_1M_3. Dan is:
$BM_3^2 = AM_3^2 - AB^2 = M_1M_3^2 - BM_3^2$
zodat: $(R + r)^2 - (R - r)^2 = (R - r)^2 - r^2$.
Dit levert op: $r = \frac{1}{6}R$.

Neem daarna $M_2A = \frac{1}{2}R$ en stel de straal van de cirkel met middelpunt M_2 gelijk aan x.
Gebruik de stelling van Pythagoras in de driehoeken AM_2M_4 en $M_1M_2M_4$. Dan is:
$AM_4^2 = AM_2^2 + M_2M_4^2$ en $M_1M_4^2 = M_1M_2^2 + M_1M_4^2$.
Omdat $AM_4^2 = M_1M_4^2$ geldt: $\left(\frac{1}{2}R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}R - x\right)^2 = (R - x)^2$.
Dit levert op: $x = \frac{1}{6}R$.

Beide soorten witte cirkels zijn dus inderdaad even groot en hebben oppervlakte $\frac{1}{36}\pi R^2$.

11 – maximale rechthoek in rechthoekige driehoek

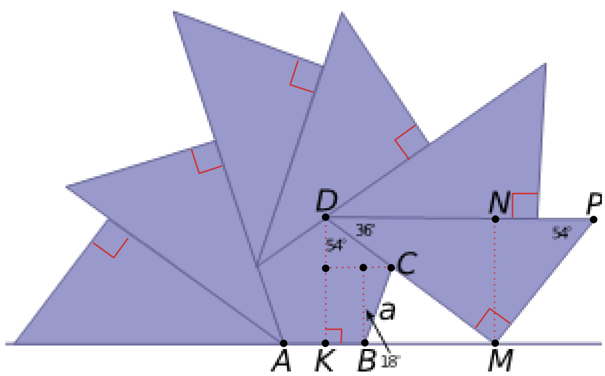
In de figuur is $\Delta ABC \sim \Delta PBQ$, dus:
$\frac{b}{a} = \frac{y}{a-x}$ zodat $y = \frac{b}{a}(a-x)$.



Daarmee is de oppervlakte van de witte rechthoek:
$A = x \cdot y = x \cdot \frac{b}{a}(a-x) = bx - \frac{b}{a}x^2$.
A is dus een kwadratische functie van x.
De top van de bijbehorende bergparabool is (kun je vinden door differentiëren of rechtstreeks vanuit de formule):
$\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right)$
De witte rechthoek heeft dus zijn grootste oppervlakte als P het midden is van AB.

12 – pentagon met zes congruente rechthoekige driehoeken

In het pentagon zijn alle hoeken $108°$.
Je kunt er op twee rechthoekige driehoekjes in tekenen, één met hoeken van $90°; 54°; 36°$ en één met hoeken van $90°; 18°; 72°$:
En dus is $KD = a \cdot \cos(18°) + a \cdot \cos(54°)$.
Omdat $MN = KD$ en $\angle MDN = 36°$ (beredeneer dit vanuit de evenwijdigheid van DN en AM) geldt ook $\angle MPN = 54°$.
Dan is de hypotenusa



$$DP = \frac{h}{\tan(36°)} + \frac{h}{\tan(54°)} =$$
$$\frac{a \cdot \cos(18°) + a \cdot \cos(54°)}{\tan(36°)} + \frac{a \cdot \cos(18°) + a \cdot \cos(54°)}{\tan(54°)} =$$
$$a \cdot \left(\frac{\cos(18°) + \cos(54°)}{\tan(36°)} + \frac{\cos(18°) + \cos(54°)}{\tan(54°)}\right) \approx 3{,}236a \, .$$