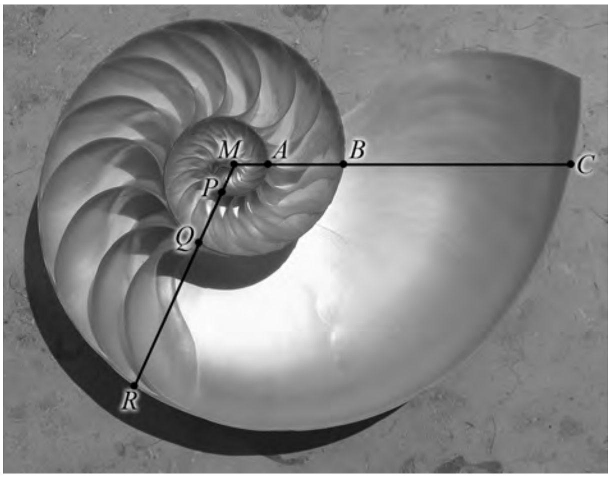
Spiraalvormen

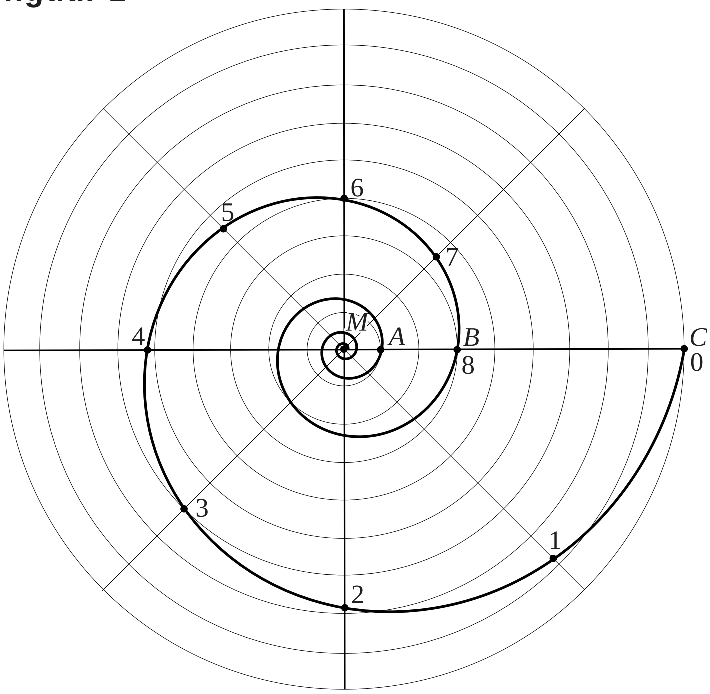
Op de foto zie je de binnenkant van een Nautilusschelp. In deze schelp is een bijzondere spiraalvorm te zien. Er is een horizontale lijn getekend vanuit het midden van de schelp M. Die lijn snijdt de schelpwanden in de punten A, B en C. De afstand van het midden tot zo'n snijpunt neemt bij benadering steeds toe met dezelfde groeifactor. Er geldt: $MB \approx 3 \cdot MA$ en $MC \approx 3 \cdot MB$. Deze eigenschap geldt ook als je in een willekeurige andere richting een lijn vanuit het midden trekt, bijvoorbeeld de lijn waarop P, Q en R liggen. Een spiraal met deze eigenschap heet een **groeispiraal**.

foto



In figuur 1 is de groeispiraal die hoort bij de Nautilusschelp getekend in een cirkelvormig rooster[1]. $MC = 9$, $MB = 3$ en $MA = 1$.

figuur 1



noot 1 Wiskundig gezien loopt de spiraal in het midden steeds door, maar op den duur wordt hij te klein om te tekenen.

We bekijken de spiraal nu van buiten naar binnen. Te beginnen bij punt C zijn er op de spiraal punten getekend met de nummers 0 tot en met 8. Voor het volgende punt moet je steeds een hoek van 45º verder draaien. De afstanden van het midden M tot de punten 0, 1, 2, 3 en 4 staan in de tabel.

tabel

punt	0	1	2	3	4
afstand tot middelpunt M	9,00	7,85	6,84	5,96	5,20

De afstanden in de tabel nemen af met een vaste groeifactor.

4p **5** Toon dit aan voor alle in de tabel genoemde punten en geef deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

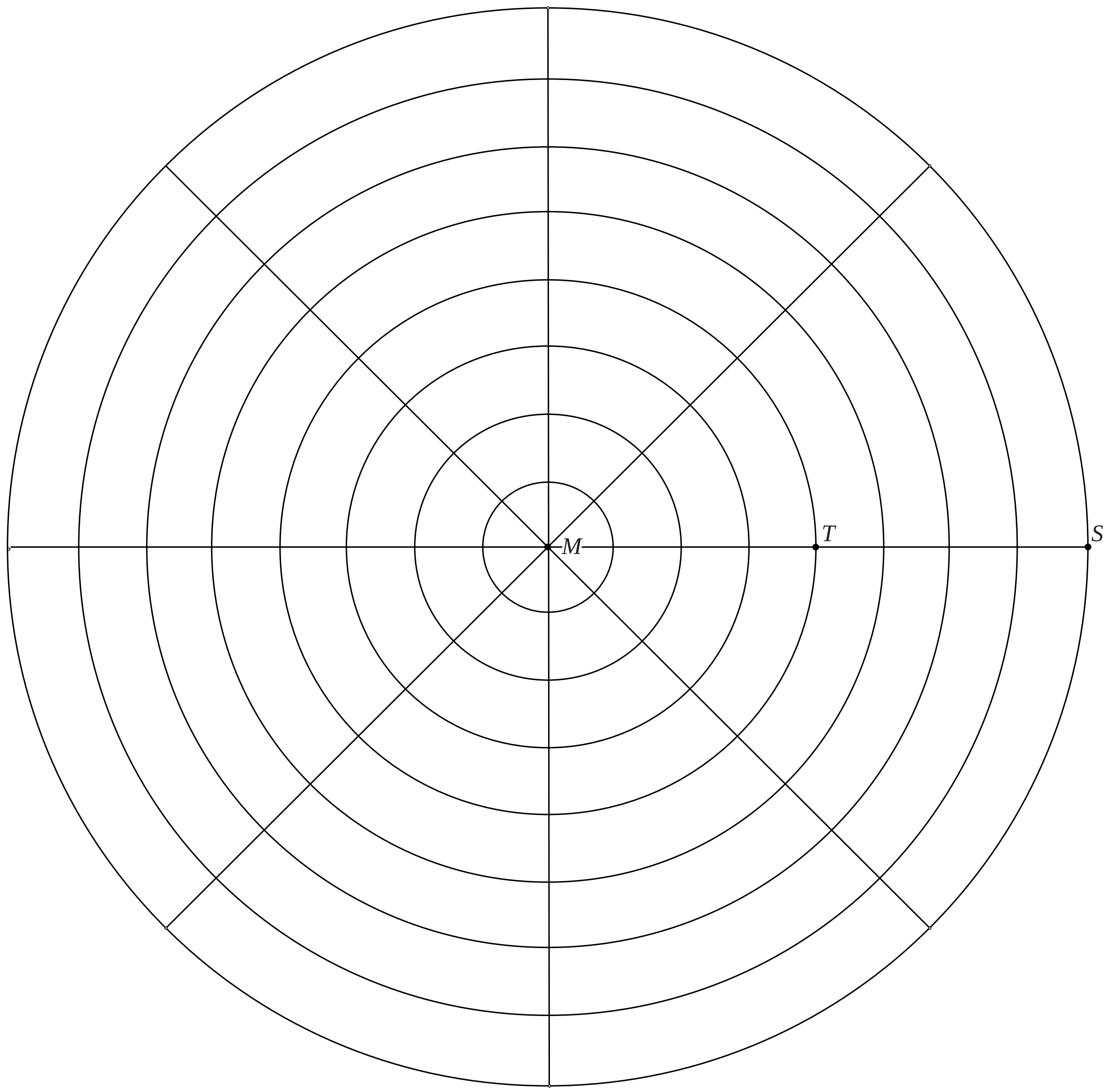
Bij een andere groeifactor hoort een andere spiraal. Op de uitwerkbijlage zie je de punten M, T en S getekend. $MS = 8$ cm en $MT = 4$ cm. Een groeispiraal begint in punt S en is na één winding (één keer rondgaan) in punt T aangekomen.

6p **6** Teken het gedeelte van de groeispiraal tussen punt S en punt T in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je antwoord toe met berekeningen.

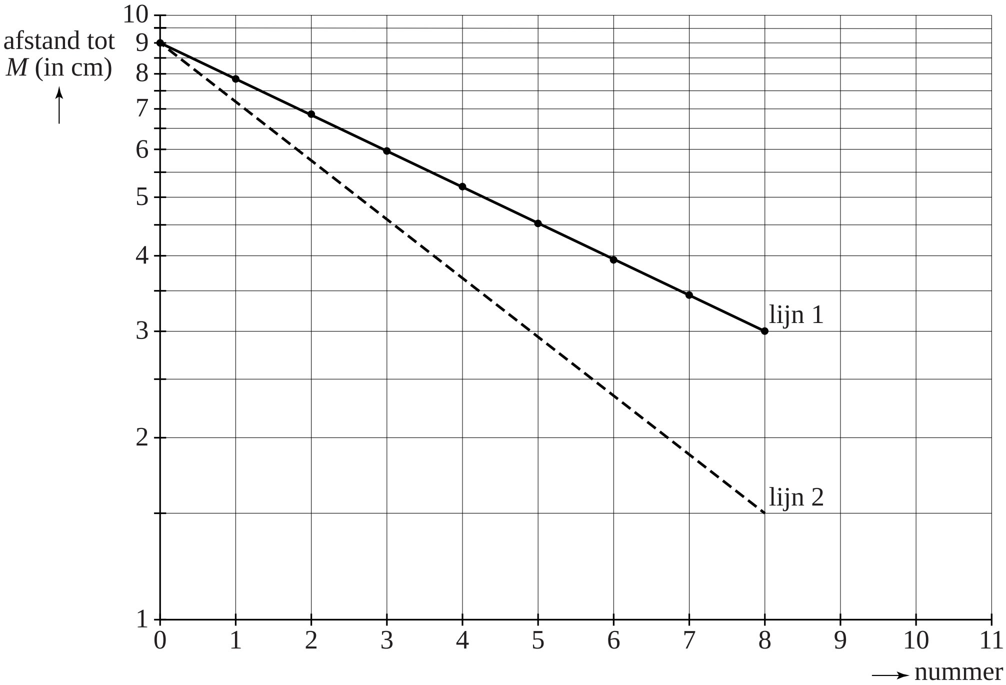
Een groeispiraal heet ook wel **logaritmische spiraal.** Als we de punten uit de tabel uitzetten op roosterpapier waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft, liggen deze punten op een rechte lijn. Zie lijn 1 in figuur 2.

uitwerkbijlage

6



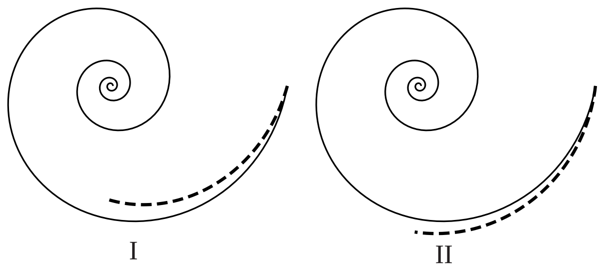
figuur 2



Lijn 1 hoort bij de spiraal van figuur 1. Bij deze lijn hoort de formule $A = 9 \cdot 0{,}87^n$. Hierin is n het nummer van het punt en A de afstand van het punt tot het middelpunt M. Lijn 2 (gestippeld) in figuur 2 hoort bij een andere spiraal. Ook bij lijn 2 hoort een exponentiële groeiformule.

In figuur 3 zijn twee mogelijke situaties I en II geschetst. De volledig getekende spiraal hoort bij lijn 1 uit figuur 2. Het gestippelde deel is het begin van de spiraal die hoort bij lijn 2 uit figuur 2.

figuur 3



3p 7 Leg uit met behulp van figuur 2 welke van beide situaties I of II de juiste is en geef aan of de groeifactor in de formule die bij lijn 2 hoort groter of kleiner dan 0,87 zal zijn.

De formule $A = 9 \cdot 0{,}87^n$ van de spiraal van figuur 1 kunnen we met de rekenregels voor logaritmen herleiden tot een formule van de vorm $\log(A) = a \cdot n + b$. De eerste twee regels van deze herleiding staan hieronder:

$$A = 9 \cdot 0{,}87^n$$

$$\log(A) = \log(9 \cdot 0{,}87^n)$$

4p 8 Maak de herleiding af en geef de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.