

## Internationale trein

De internationale trein van Amsterdam naar Stettin (Polen) legt de 775 km tussen beide plaatsen af in 8 uur en 38 minuten. De gemiddelde snelheid over de hele reis is dus iets minder dan 90 km/uur.

Onderweg stopt de trein op 21 tussenliggende stations. De werkelijke tijd dat de trein rijdt, de zogeheten netto reistijd, is daardoor minder dan 8 uur en 38 minuten. De gemiddelde snelheid gedurende de netto reistijd is 107,64 km/uur.

- 3p **14** Bereken hoe lang de trein op de tussenliggende stations in totaal stil staat.

De treinreis bestaat uit 22 trajecten. Uit de dienstregeling blijkt dat de afstanden en tijden van traject tot traject flink verschillen. Dit kunnen we op verschillende manieren weergeven.

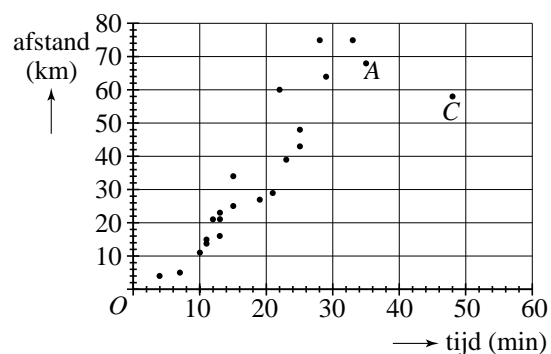
### Afstand-tijd-diagram

Een manier om de trajecten weer te geven is een afstand-tijd-diagram. Langs de horizontale as staat de duur van een traject in minuten, langs de verticale as de afstand in km. In zo'n diagram kun je de snelheid op een traject als het ware aflezen. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

In figuur 1 is ieder traject met een punt aangegeven. Zo hoort punt A bij een traject van 68 km dat in 35 minuten wordt afgelegd. De gemiddelde snelheid op dat traject is dan bijna 117 km/uur.

Marieke bekijkt figuur 1 en zegt: "Er zijn maar weinig trajecten waarop de gemiddelde snelheid lager is dan op traject C."

figuur 1



- 3p **15** Onderzoek op hoeveel trajecten de gemiddelde snelheid lager is dan op traject C. Licht je antwoord toe. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

### Lorentz-kromme

Er is ook een andere manier om de trajecten weer te geven. Dat gaat als volgt:

- eerst berekenen we van elk traject de gemiddelde snelheid;
- daarna maken we een lijst van de trajecten op volgorde van gemiddelde snelheid, van langzaam naar snel;
- vervolgens maken we lijsten van cumulatieve tijden en cumulatieve afstanden.

In de volgende tabel is hiermee een begin gemaakt.

tabel

| 1   | 2              | 3            | 4                            | 5                  | 6                     |
|---|----------------|--------------|------------------------------|--------------------|-----------------------|
| traject (op volgorde van gemiddelde snelheid) | tijd (minuten) | afstand (km) | gemiddelde snelheid (km/uur) | cumulatieve tijden | cumulatieve afstanden |
| 1   | 7              | 5            | 43                           | 7                  | 5                     |
| 2   | 4              | 4            | 60                           | 11                 | 9                     |
| 3   | 10             | 11           | 66                           | 21                 | 20                    |
| 4   | 48             | 58           | 73                           | 69                 | 78                    |
| ...   | ...            | ...          | ...                          | ...                | ...                   |

Voorbeeld:

De som van de tijden van de drie langzaamste trajecten uit kolom 2 is  $7 + 4 + 10 = 21$  (zie kolom 5).

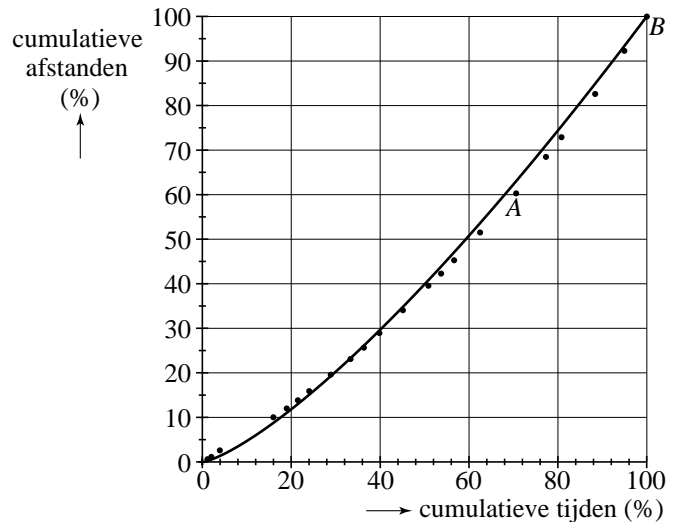
De som van de afstanden van de drie langzaamste trajecten uit kolom 3 is  $5 + 4 + 11 = 20$  (zie kolom 6).

Hierna zetten we de cumulatieve tijden en afstanden om in percentages van de totale tijd en de totale afstand. Deze percentages zetten we uit in een speciaal soort afstand-tijd-diagram, een zogenoemde Lorentz-kromme. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2

Traject A uit figuur 1 is ook in figuur 2 opgenomen. In figuur 2 geeft punt A aan dat alle trajecten die niet sneller worden afgelegd dan traject A, ongeveer 70% van de totale tijd innamen, en ongeveer 60% van de totale afstand.

Ook kun je in figuur 2 aflezen dat 5 trajecten afgelegd worden met een hogere gemiddelde snelheid dan traject A.



- 4p 16 Geef op de uitwerkbijlage in figuur 1 punt B aan en in figuur 2 punt C. Licht je werkwijze toe.

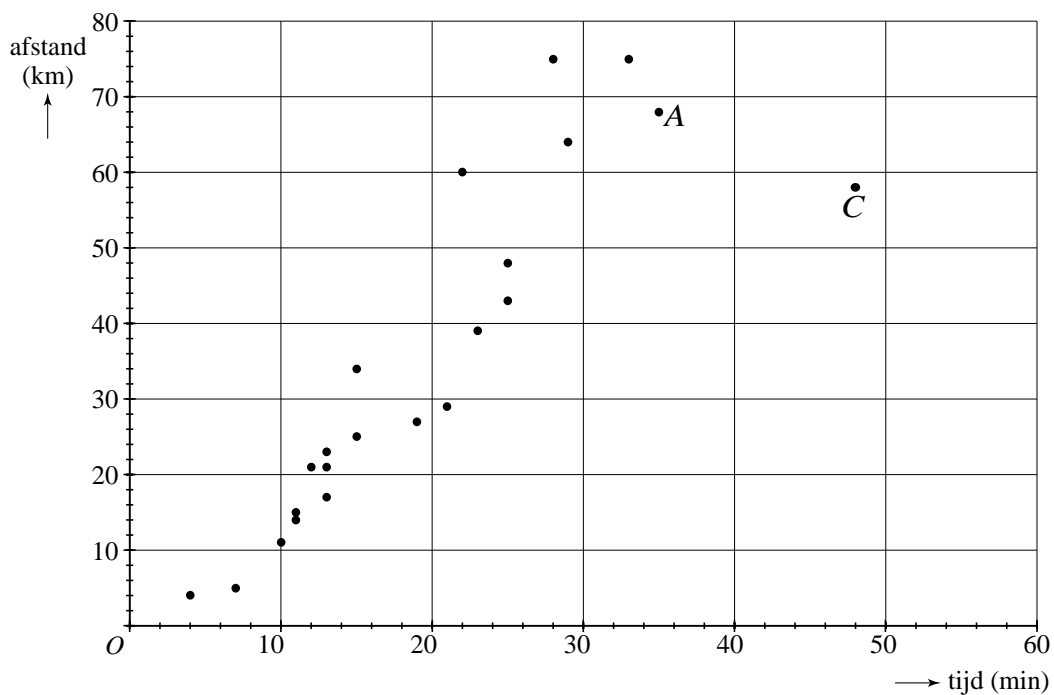
In figuur 2 is ook de grafiek van  $s = 100 \cdot \left(\frac{t}{100}\right)^{1,326}$  getekend, waarin  $s$  de cumulatieve afstand (in procenten) is, en  $t$  de cumulatieve tijd (in procenten). De grafiek benadert de punten van de trajecten goed. Dit model kan ook geschreven worden in de vorm  $s = c \cdot t^{1,326}$ , waarbij  $c$  een constante is.

- 4p 17 Bereken  $c$  in drie decimalen nauwkeurig.

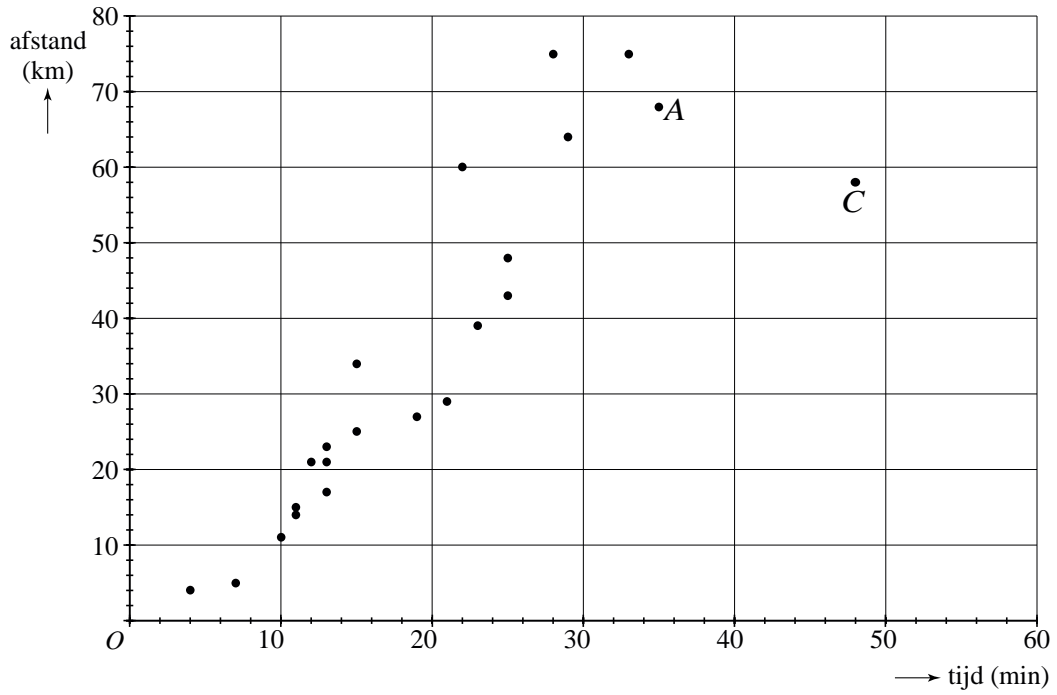
uitwerkbijlage

Naam kandidaat \_\_\_\_\_ Kandidaatnummer \_\_\_\_\_

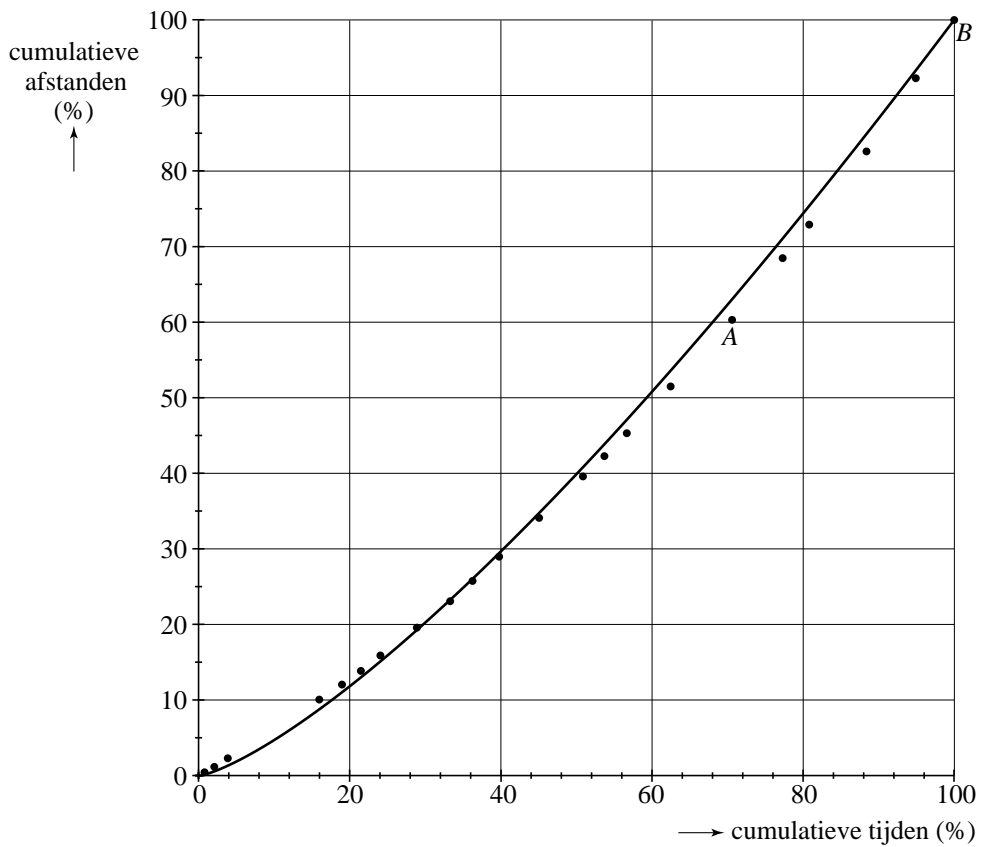
15



16 **figuur 1**



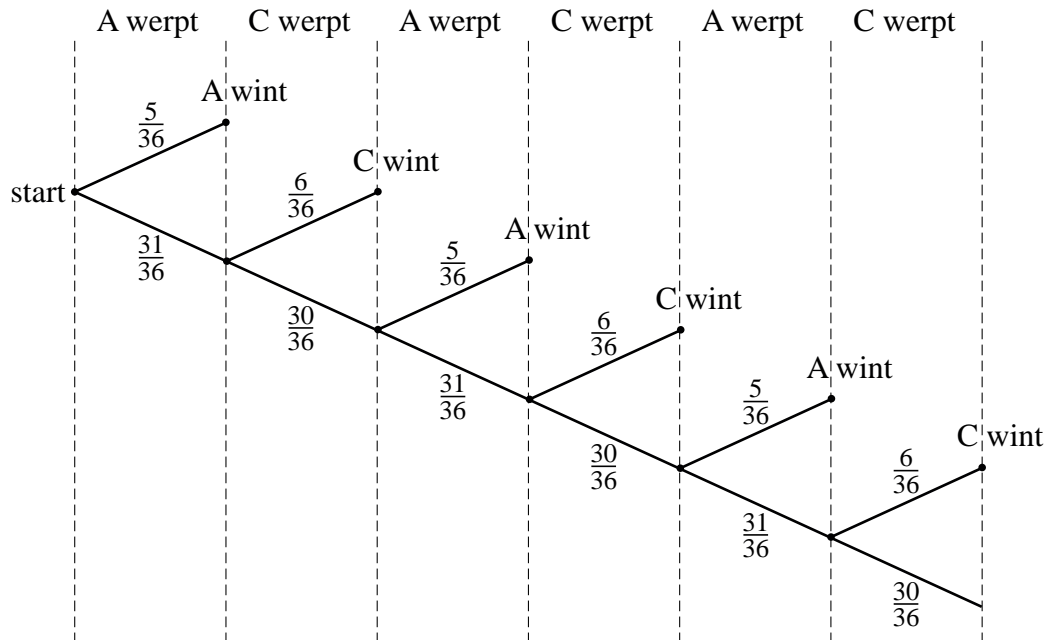
**figuur 2**



Het spel lijkt oneerlijk, omdat de kans op zes ogen kleiner is dan de kans op zeven ogen. Maar misschien valt dit mee, aangezien Aad altijd begint met werpen.

Het spelverloop is weergegeven in onderstaande figuur.

**figuur**



De kans dat het spel na maximaal zes worpen een winnaar oplevert, is ongeveer 0,63. Dit is als volgt in te zien:

De kans dat Aad in beurt 1, 3 of 5 wint, is  $\frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} \approx 0,31$ .

Op dezelfde manier kun je berekenen dat de kans dat Christiaan in beurt 2, 4 of 6 wint ongeveer 0,32 is.

3p **19** Bereken deze kans in vier decimalen.

De kans is echter klein dat er na 20 worpen nog niemand gewonnen heeft.

4p **20** Bereken de kans dat een spel langer dan 20 worpen duurt.

Huygens berekende de kans om het spel te winnen niet door het spel voor een groot aantal worpen door te rekenen, maar op een andere manier.

Hij zag dat het patroon, zoals dat in de figuur staat, zich herhaalt. Als C in zijn worp niet wint, zal A opnieuw werpen; het boomdiagram ziet er vanaf dat moment precies zo uit als aan het begin.

Huygens noemde de kans dat A wint  $p$  en stelde de volgende vergelijking op:

$$p = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot p$$

Door deze vergelijking op te lossen, kon hij de kans dat A wint berekenen. Daarna kon hij ook de kans dat C wint berekenen, en daarmee de verhouding tussen beide winkansen.

4p **21** Los de vergelijking op en bereken de verhouding tussen beide winkansen.