Vraag	Antwoord	Scores

Gelijke oppervlakte

1 maximumscore 4

- $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 1$ 1
- $\dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$ geeft $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ 1
- Dit geeft $x = 2\frac{1}{4}$ 1
- $f(2\frac{1}{4})\ (= 3\sqrt{2\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{4}) = 2\frac{1}{4}$ (dus de coördinaten van T zijn $\left(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$) 1

2 maximumscore 6

- De oppervlakte van V is $\int_0^9 \left(3\sqrt{x} - x\right)\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $3\sqrt{x} - x$ is $2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$ 1
- De oppervlakte van V is $\left[2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^9 = 13\frac{1}{2}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door A en T is $-\frac{1}{3}$ 1
- De y-coördinaat van B is 3 1
- De oppervlakte van driehoek OAB is $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 13\frac{1}{2}$ (dus de oppervlakte van V en de oppervlakte van driehoek OAB zijn gelijk) 1

of

- De oppervlakte van V is $\int_0^9 \left(3\sqrt{x} - x\right)\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $3\sqrt{x} - x$ is $2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$ 1
- De oppervlakte van V is $\left[2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^9 = 13\frac{1}{2}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door A en T is $-\frac{1}{3}$ 1
- Een vergelijking van de lijn door A en T is $y = -\frac{1}{3}x + 3$ 1
- De oppervlakte van driehoek OAB is $\int_0^9 \left(-\frac{1}{3}x + 3\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^2 + 3x\right]_0^9 = 13\frac{1}{2}$ (dus de oppervlakte van V en de oppervlakte van driehoek OAB zijn gelijk) 1

Het uiteinde van een wip

3 maximumscore 3

- $h_2(\frac{5}{3}) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\cdot\frac{5}{3} - \frac{\pi}{5}\right) = 1 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ 1
- $h_3(\frac{5}{3}) = 1 + 2\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{6\pi}{5}\cdot\frac{5}{3} - \frac{31\pi}{30}\right)$ 1
- Dit geeft $h_3(\frac{5}{3}) = 1 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ (dus de hoogtes zijn gelijk) 1

4 maximumscore 4

- $h_1'(t) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{3\pi}{10}\cdot 2t$ 2
- $h_1'(\frac{1}{3}) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{90} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{3\pi}{10}\cdot\frac{2}{3} = 2\cos\left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{2\pi}{10}$ 1
- Dus $h_1'(\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{5}\cos\left(-\frac{2\pi}{15}\right) = \frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ (dus de hellingen zijn gelijk) 1

5 maximumscore 4

- $h_2(1-a) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}(1-a) - \frac{\pi}{5}\right) = 1 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{5}a\right)$ (voor $0 < a < \frac{2}{3}$) 1
- $h_2(1-a) = 1 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{5}a\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{5}a\right)$ 1
- $h_2(1+a) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}(1+a) - \frac{\pi}{5}\right) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}a\right)$ 1
- $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{5}a\right) + 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}a\right) = 2$

  (, dus $\frac{h_2(1-a) + h_2(1+a)}{2} = 1$) 1

of

- De gelijkheid geldt als de grafiek van h_2 puntsymmetrisch is ten opzichte van $(1, 1)$ 1
- De grafiek van h_2 is een sinusoïde en daarom puntsymmetrisch ten opzichte van elk punt van de grafiek dat op de evenwichtsstand ligt 1
- De evenwichtsstand van h_2 is 1 1
- $h_2(1) = 1 + 2\sin 0 = 1$, dus de grafiek van h_2 is puntsymmetrisch ten opzichte van $(1, 1)$ (dus de gelijkheid geldt) 1

Cirkel en lijnstuk

6 maximumscore 5

- ME is bissectrice van $\angle AMB$; *bissectrices driehoek* 1
- Dus $\angle AME = \angle BME$ (; *bissectrice*) 1
- $CM = DM$ (; *straal cirkel*) (en $ME = ME$) 1
- $\Delta CME \cong \Delta DME$; *ZHZ* 1
- Hieruit volgt dat de lijnstukken CE en DE even lang zijn 1

Gespiegelde punten

7 maximumscore 7

- De x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x-as is 1 1
- $x_P = 1 - a$ 1
- De y-coördinaat van het punt op de grafiek van f met x-coördinaat a is $2 \cdot \ln a$ 1
- $y_Q = 2 \cdot \ln a$ 1
- $2 \cdot \ln a = -(1 - a)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1
- ($a = 1$ voldoet niet, dus) het antwoord is 3,51 1

of

- $g(x) = 2 \cdot \ln(x + a)$ 1
- x_P is de oplossing van $2 \cdot \ln(x + a) = 0$ 1
- $x_P = 1 - a$ 1
- $y_Q = 2 \cdot \ln a$ 1
- $2 \cdot \ln a = -(1 - a)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1
- ($a = 1$ voldoet niet, dus) het antwoord is 3,51 1

Ankerketting

8 maximumscore 6

- $f'(x) = \frac{1}{2a} \cdot \left(a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{-ax}\right) = \frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}$ 2
- $\left(\frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ax} - 2 \cdot \frac{1}{2}e^{ax} \cdot \frac{1}{2}e^{-ax} + \frac{1}{4}e^{-2ax}$ 1
- $\left(\frac{1}{2}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ax} + 2 \cdot \frac{1}{2}e^{ax} \cdot \frac{1}{2}e^{-ax} + \frac{1}{4}e^{-2ax}$ 1
- $\left(\frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ax} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ax}$ en
  $\left(\frac{1}{2}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ax} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ax}$ 1
- $1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}e^{2ax} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ax} =$
  $\frac{1}{4}e^{2ax} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ax} = \left(\frac{1}{2}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2$ (dus geldt de gelijkheid) 1

9 maximumscore 5

- De waterdiepte is $f(96) \approx 34$ (meter) (of nauwkeuriger) 1
- De lengte van de ankerketting is $\int_0^{96} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ 1
- Beschrijven hoe deze integraal met de GR kan worden berekend 1
- De lengte van de ankerketting is ongeveer 104 meter (of nauwkeuriger) 1
- ($104 > 3 \cdot 34$, dus) de ankerketting voldoet aan de vuistregel 1

of

- De waterdiepte is $f(96) \approx 34$ (meter) (of nauwkeuriger) 1
- De lengte van de ankerketting is $\int_0^{96} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ 1
- $\int_0^{96} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^{96} \left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{140} \cdot x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{140} \cdot x}\right) dx$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{140} \cdot x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{140} \cdot x}$ is $70e^{\frac{1}{140} \cdot x} - 70e^{-\frac{1}{140} \cdot x}$;
  $70e^{\frac{96}{140}} - 70e^{-\frac{96}{140}} \approx 104$ (en $70e^0 - 70e^0 = 0$), dus de lengte van de ankerketting is ongeveer 104 meter (of nauwkeuriger) 1
- ($104 > 3 \cdot 34$, dus) de ankerketting voldoet aan de vuistregel 1

Acht keer zo groot

10 maximumscore 5

- De oppervlakte van het rechterdeel is $\int_{p}^{3p}(3px^2 - x^3)\,dx$ 1
- Een primitieve van $3px^2 - x^3$ is $px^3 - \frac{1}{4}x^4$ 2
- De oppervlakte van het rechterdeel is $6p^4$ 1
- De oppervlakte van het rechterdeel is $\frac{6p^4}{\frac{3}{4}p^4} = 8$ keer zo groot als die van het linkerdeel 1

of

- De oppervlakte van V is $\int_{0}^{3p}(3px^2 - x^3)\,dx$ 1
- Een primitieve van $3px^2 - x^3$ is $px^3 - \frac{1}{4}x^4$ 2
- De oppervlakte van V is $6\frac{3}{4}p^4$ 1
- De oppervlakte van het rechterdeel is $(6\frac{3}{4}p^4 - \frac{3}{4}p^4 =)\ 6p^4$ en dat is $\frac{6p^4}{\frac{3}{4}p^4} = 8$ keer zo groot als de oppervlakte van het linkerdeel (of: de oppervlakte van V is $\frac{6\frac{3}{4}p^4}{\frac{3}{4}p^4} = 9$ keer zo groot als die van het linkerdeel, dus is de oppervlakte van het rechterdeel 8 keer zo groot als die van het linkerdeel) 1

11 maximumscore 4

- De lengte van BO is gelijk aan $\sqrt{p^2 + 4p^6}$ 1
- De vergelijking $\sqrt{p^2 + 4p^6} = 3p$ moet worden opgelost 1
- Herleiden tot $4p^6 = 8p^2$ 1
- Het antwoord: $p = \sqrt[4]{2}$ 1

12 maximumscore 5

- $f_p'(x) = 6px - 3x^2$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de buigraaklijn is $f_p'(p) = 3p^2$ 1
- Een vergelijking van de buigraaklijn is $y = 3p^2 x - p^3$ 1
- De buigraaklijn snijdt de x-as in $C\ (\frac{1}{3}p, 0)$ 1
- $\frac{CA}{OC} = \frac{2\frac{2}{3}p}{\frac{1}{3}p} = 8$ (en dus is de lengte van CA acht keer zo groot als de lengte van OC) 1

Tussen twee bewegende punten

13 maximumscore 4

- De lengte van $A'B'$ is $|x_A - x_B|$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van $|\cos(3t) - \cos t|$ gevonden kan worden 1
- Per rondgang zijn er 4 maxima die even groot zijn 1
- Het antwoord: 1,54 1

of

- Het verschil tussen de x-coördinaat van A' en de x-coördinaat van B' is $x_A - x_B$ 1
- Beschrijven hoe het maximum en het minimum van $\cos(3t) - \cos t$ gevonden kunnen worden 1
- Per rondgang zijn er 2 maxima en 2 minima die in absolute waarde even groot zijn 1
- Het antwoord: 1,54 1

Opmerking
Als alleen het maximum van $x_A - x_B$ ofwel $x_B - x_A$ wordt beschouwd, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

14 maximumscore 4

- De richtingscoëfficiënt van koorde AB is gelijk aan $\frac{\sin(3t) - \sin t}{\cos(3t) - \cos t}$ 1
- $\sin(3t) - \sin t = 2\sin t \cdot \cos(2t)$ 1
- $\cos(3t) - \cos t = -2\sin(2t) \cdot \sin t$ 1
- Dus $a = \frac{2\sin t \cdot \cos(2t)}{-2\sin(2t) \cdot \sin t} = -\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$ (want $\sin t \neq 0$) 1

15 maximumscore 5

- $-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1$ geeft $\cos(2t) = \sin(2t)$ — 1
- $\sin(2t) = \cos(2t - \frac{1}{2}\pi)$, dus $\cos(2t) = \cos(2t - \frac{1}{2}\pi)$ — 1
- $2t = 2t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) (welke geen oplossingen heeft) of
  $2t = -2t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) — 1
- $4t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $t = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ (met k geheel) — 1
- Het antwoord: $t = \frac{1}{8}\pi$ of $t = \frac{5}{8}\pi$ of $t = 1\frac{1}{8}\pi$ of $t = 1\frac{5}{8}\pi$ — 1

of

- $-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1$ geeft $\cos(2t) = \sin(2t)$ — 1
- (Een redenering met eenheidscirkel of grafieken waaruit volgt dat)
  $2t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ (met k geheel) — 2
- $t = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ (met k geheel) — 1
- Het antwoord: $t = \frac{1}{8}\pi$ of $t = \frac{5}{8}\pi$ of $t = 1\frac{1}{8}\pi$ of $t = 1\frac{5}{8}\pi$ — 1

of

- $-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1$ geeft $-\dfrac{1}{\tan(2t)} = -1$ — 1
- $\tan(2t) = 1$ — 1
- $2t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ (met k geheel) — 1
- $t = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ (met k geheel) — 1
- Het antwoord: $t = \frac{1}{8}\pi$ of $t = \frac{5}{8}\pi$ of $t = 1\frac{1}{8}\pi$ of $t = 1\frac{5}{8}\pi$ — 1

Diagonalen en gelijke hoeken

16 maximumscore 4

- $\angle BAC = \angle BDC$; *constante hoek* 1
- $\angle BCA = \angle BDA$; *constante hoek* 1
- Omdat $\angle BDC = \angle BDA$ volgt: $\angle BAC = \angle BCA$ 1
- Dus $AB = BC$; *gelijkbenige driehoek* 1

of

- $\angle AMB = 2 \cdot \angle ADB$ en $\angle BMC = 2 \cdot \angle BDC$, waarbij M het middelpunt van de cirkel is; *omtrekshoek* 1
- Omdat $\angle ADB = \angle BDC$ volgt: $\angle AMB = \angle BMC$ 1
- Dit betekent: kleinste boog AB = kleinste boog BC 1
- Dit geeft $AB = BC$; *boog en koorde* 1

of

- $\angle AMB = 2 \cdot \angle ADB$ en $\angle BMC = 2 \cdot \angle BDC$, waarbij M het middelpunt van de cirkel is; *omtrekshoek* 1
- Omdat $\angle ADB = \angle BDC$ volgt: $\angle AMB = \angle BMC$ 1
- Ook geldt $AM = BM = CM$ (; *cirkel*), dus $\Delta AMB \cong \Delta BMC$; *ZHZ* 1
- Dit geeft $AB = BC$ 1

17 maximumscore 6

- $MA = MC$ (; *straal cirkel*) en $BA = BC$ (resultaat vorige vraag), dus BM is middelloodlijn van lijnstuk AC (; *middelloodlijn*) 2
- AC verdeelt $\angle BAD$ in twee gelijke hoeken, dus $BC = CD$ (resultaat vorige vraag) 1
- $MB = MD$ (; *straal cirkel*) en $CB = CD$, dus CM is middelloodlijn van lijnstuk BD (; *middelloodlijn*) 1
- $\angle EFM = \angle EGM = 90°$; *middelloodlijn* 1
- $\angle EFM + \angle EGM = 180°$, dus vierhoek $EFMG$ is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) (, dus E, F, M en G liggen op een cirkel) 1

of

- $\angle BDA = \angle BDC = \angle BAC = \angle CAD = \alpha$; *constante hoek* 1
- $\angle AED = 180° - 2\alpha$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle FEG = 180° - 2\alpha$; *overstaande hoek* 1
- $\angle CMB = 2\alpha$; *omtrekshoek* 1
- $\angle FMG = 2\alpha$; *overstaande hoek* 1
- $\angle FEG + \angle FMG = 180°$, dus vierhoek $EFMG$ is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) (, dus E, F, M en G liggen op één cirkel) 1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per examinator in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 20 juni naar Cito.