Vraag	Antwoord	Scores

Bal in de sloot

1 maximumscore 4

- De gevraagde inhoud I is $\pi\int_0^h \left(f(x)\right)^2 \, dx$ — 1
- $\pi\int_0^h \left(f(x)\right)^2 \, dx = \pi\int_0^h (22x - x^2) \, dx$ — 1
- Een primitieve van $22x - x^2$ is $11x^2 - \frac{1}{3}x^3$ — 1
- $I = \pi(11h^2 - \frac{1}{3}h^3) = \pi h^2(11 - \frac{1}{3}h)$ — 1

2 **maximumscore 3**

- Er moet gelden $\pi h^2(11-\frac{1}{3}h)=425$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 37 (mm) (of 3,7 cm) — 1

Boven en onder de lijn door de buigpunten

3 **maximumscore 4**

- $f_p''(x)=12x^2-12p^2$ — 1
- Primitiveren geeft $f_p'(x)=4x^3-12p^2x+a$ (met a een constante) — 2
- Nogmaals primitiveren geeft $f_p(x)=x^4-6p^2x^2+ax+b$ (met b een constante) (, dus is het gestelde juist) — 1

Opmerking
Als met differentiëren is aangetoond dat $f_p''(x)=12(x-p)(x+p)$ volgt uit $f_p(x)=x^4-6p^2x^2+ax+b$ voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

4 **maximumscore 4**

- $x^4-6x^2-8x+5=-8x$ geeft $x^4-6x^2+5=0$ — 1
- Dus $(x^2-1)(x^2-5)=0$ — 1
- Hieruit volgt $x^2=1$ of $x^2=5$ — 1
- ($x^2=1$ geeft de x-coördinaten van de buigpunten, dus) de x-coördinaten van de twee gevraagde snijpunten zijn $x=-\sqrt{5}$ en $x=\sqrt{5}$ — 1

5 maximumscore 4

- De oppervlakte van V_2 is gelijk aan $\int_{-1}^{1}\Big((x^4-6x^2-8x+5)-(-8x)\Big)\,\mathrm{d}x$,
  dus aan $\int_{-1}^{1}(x^4-6x^2+5)\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van x^4-6x^2+5 is $\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x$ 1
- $\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x\right]_{-1}^{1}=6\frac{2}{5}$ 1
- $6\frac{2}{5}=3\frac{1}{5}+3\frac{1}{5}$ (dus de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 is gelijk aan de oppervlakte van V_2) 1

of

- Omdat zowel V_1 als V_3 onder de lijn met vergelijking $y=-8x$ ligt en V_2 erboven, is de bewering juist indien geldt:
  $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\Big((x^4-6x^2-8x+5)-(-8x)\Big)\,\mathrm{d}x=0$, dus $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x^4-6x^2+5)\,\mathrm{d}x=0$ 2
- Een primitieve van x^4-6x^2+5 is $\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x$ 1
- $\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}=0$ (dus de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 is gelijk aan de oppervlakte van V_2) 1

Grafiek verdeelt rechthoek

6 maximumscore 7

- De grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{p}$ snijden elkaar voor $x = p$ — 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1 + \int_p^{2p} \frac{1}{x}\,dx$ — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{x}$ is $\ln x$ — 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1 + \ln(2p) - \ln p$ — 1
- $1 + \ln(2p) - \ln p = 1 + \ln 2 + \ln p - \ln p = 1 + \ln 2$
  (of: $1 + \ln(2p) - \ln p \ (= 1 + \ln\left(\frac{2p}{p}\right)) = 1 + \ln 2$) — 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $2p \cdot \frac{1}{p} = 2$ — 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $1 - \ln 2$ (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van p) — 1

of

- De grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{p}$ snijden elkaar voor $x = p$ — 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $\int_p^{2p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x}\right) dx$ — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{p} - \frac{1}{x}$ is $\frac{1}{p}x - \ln x$ — 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $1 - \ln(2p) + \ln p$ — 1
- $1 - \ln(2p) + \ln p = 1 - \ln 2 - \ln p + \ln p = 1 - \ln 2$
  (of: $1 - \ln(2p) + \ln p \ (= 1 - \ln\left(\frac{2p}{p}\right)) = 1 - \ln 2$) — 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $2p \cdot \frac{1}{p} = 2$ — 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1 + \ln 2$ (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van p) — 1

De ideale stoothoek

7 maximumscore 4

- De kogel komt op de grond als $1,96+11,2t-4,9t^2=0$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- De (positieve) oplossing is $t \approx 2,45$ — 1
- $x = 8,4 \cdot 2,45 \approx 20,6$ dus de horizontale afstand is 206 (dm) (of 20,6 m) — 1

8 maximumscore 3

- Er moet gelden: $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 0,1 \cdot 1,85}\right)$ is maximaal — 1
- Beschrijven hoe hieruit α gevonden kan worden — 1
- Het antwoord: 0,74 (rad) (of 43°) (of nauwkeuriger) — 1

9 maximumscore 6

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ — 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ — 1
- $\dfrac{dr}{d\alpha} = 40\cos^2\alpha - 40\sin^2\alpha$ — 2
- $\dfrac{dr}{d\alpha} = 0$ geeft $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ — 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) het antwoord is $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45º) — 1

of

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ — 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ — 1
- $40\cos\alpha\sin\alpha = 20\sin(2\alpha)$ — 1
- $\dfrac{dr}{d\alpha} = 20\cdot 2\cdot\cos(2\alpha)$ — 1
- $\dfrac{dr}{d\alpha} = 0$ geeft $\cos(2\alpha) = 0$ — 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) het antwoord is $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45º) — 1

of

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ — 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ — 1
- $40\cos\alpha\sin\alpha = 20\sin(2\alpha)$ — 1
- r is maximaal als $\sin(2\alpha)$ maximaal is — 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) $\sin(2\alpha)$ is maximaal als $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$ — 1
- Het antwoord: $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45º) — 1

Even lang

10 maximumscore 4

- $\angle CZD = \angle HZG$; *overstaande hoeken* 1
- $\angle ACB = \angle AFE = 60°$, dus $BC//HF$ (*gelijkzijdige driehoek, F-hoeken*) 1
- Hieruit volgt $\angle DCZ = \angle GHZ$; *Z-hoeken* 1
- Dus zijn de driehoeken CDZ en HGZ gelijkvormig; *hh* 1

of

- $\Delta ADB \cong \Delta ADC$; *ZZZ* (of *ZZR*, of *ZHZ*), dus $\angle EAG = \angle FAG$ 1
- Dus $\angle AGE = 180° - \angle EAG - \angle AEG = 180° - 30° - 60° = 90°$; *hoekensom driehoek*, (*gelijkzijdige driehoek*) 1
- $\angle CZD = \angle HZG$; *overstaande hoeken* 1
- (Uit $\angle CDZ = \angle HGZ$ $(= 90°)$ en $\angle CZD = \angle HZG$ volgt:) de driehoeken CDZ en HGZ zijn gelijkvormig; *hh* 1

11 maximumscore 3

- $AG = \sqrt{3} \cdot AD = 3$ 1
- Dus $AZ = \frac{2}{3} \cdot AG = 2$ (*zwaartelijnen driehoek*) 1
- $DZ = AZ - AD = 2 - \sqrt{3}$ 1

12 maximumscore 5

- Uit de genoemde gelijkvormigheid volgt $\dfrac{GH}{ZG} = \dfrac{CD}{ZD}$ 1
- Met $ZG = 3 - 2 = 1$ geeft dit $\dfrac{GH}{1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 1
- $EH = GH - EG = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ 1
- $EH = \dfrac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}} = 2$ (dus EH is even lang als AB) 2

of

- Uit de genoemde gelijkvormigheid volgt $\dfrac{GH}{ZG} = \dfrac{CD}{ZD}$ 1
- Met $ZG = 3 - 2 = 1$ geeft dit $\dfrac{GH}{1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 1
- $GH = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ 2
- $EH = GH - EG = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$ (dus EH is even lang als AB) 1

Gemeenschappelijk met de x-as

13 maximumscore 4

- $f_a'(x) = 2a\cos(ax) + 2a\cos(2ax)$ — 2
- De grafiek van f_a raakt de x-as in het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$ als $f_a'\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$ — 1
- $f_a'\left(\frac{\pi}{a}\right) = 2a\cos\pi + 2a\cos(2\pi) = 0$ (dus de grafiek van f_a raakt de x-as in het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$) — 1

Opmerking
Als voor a een waarde is ingevuld, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

14 maximumscore 5

- Aangetoond moet worden dat $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = -f_2(\frac{1}{2}\pi + p)$ (voor elke waarde van p) — 2
- $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = 2\sin(\pi - 2p) + \sin(2\pi - 4p)$ en $f_2(\frac{1}{2}\pi + p) = 2\sin(\pi + 2p) + \sin(2\pi + 4p)$ — 1
- $\sin(\pi - 2p) = \sin 2p$ en $\sin(\pi + 2p) = -\sin 2p$ — 1
- $\sin(2\pi - 4p) = -\sin(4p)$ en $\sin(2\pi + 4p) = \sin(4p)$ (dus $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = -f_2(\frac{1}{2}\pi + p)$ voor elke waarde van p) — 1

Opmerking
Als voor p een waarde is ingevuld, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

Hoogwaterstanden

15 **maximumscore 3**

- De vergelijking $1 = 10^{4,3-1,9h}$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $4,3 - 1,9h = 0$ (of beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden) 1
- $h \approx 2,3$ 1

16 **maximumscore 3**

- Na de stijging wordt $h = 2,5$ net zo vaak overschreden als $h = 2,4$ vóór de stijging werd overschreden 1
- $f(2,5) \approx 0,355$ en $f(2,4) \approx 0,550$ (of nauwkeuriger) 1
- De vermenigvuldigingsfactor is 1,5 (of nauwkeuriger) 1

of

- Het aantal keren dat de waarde $h = 2,5$ gemiddeld per jaar wordt overschreden is na de stijging $10^{1,9\,(2,5-2,4)}$ keer zo groot als vóór de stijging 2
- De vermenigvuldigingsfactor is $10^{0,19} \approx 1,5$ (of nauwkeuriger) 1

Opmerkingen
Als door tussentijds afronden de vermenigvuldigingsfactor 1,6 wordt gevonden, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.
Als voor h de waarden 2,6 en 2,5 gebruikt zijn in plaats van 2,5 en 2,4, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

17 **maximumscore 5**

- $10^{-0,45} = 10^{a-b\cdot 2,5}$ geeft $-0,45 = a - b\cdot 2,5$ 1
- $0,01 = 10^{a-b\cdot 3,9}$ geeft $-2 = a - b\cdot 3,9$ 1
- Beschrijven hoe dit stelsel opgelost kan worden 1
- $b \approx 1,1$ 1
- $a \approx 2,3$ 1

Koordenvierhoek

18 **maximumscore 5**

- $\angle PQR = \angle PSR$; *constante hoek* 1
- $\angle PQR = \angle BAR$; *Z-hoeken* 1
- $\angle RSB = 180^\circ - \angle PSR$; *gestrekte hoek* 1
- Uit het voorgaande volgt: $\angle RAB + \angle RSB = 180^\circ$ 1
- Dus vierhoek *ABSR* is een koordenvierhoek (*koordenvierhoek*) 1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van de alfabetisch eerste vijf kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 30 mei naar Cito.

De normering in het tweede tijdvak wordt mede gebaseerd op door kandidaten behaalde scores. Als het tweede tijdvak op uw school wordt afgenomen, zend dan ook van uw tweede-tijdvak-kandidaten de deelscores in met behulp van het programma WOLF.