Vraag	Antwoord	Scores

Eerste- en derdegraadsfunctie

1 maximumscore 4

- Aangetoond moet worden dat $f'(0) = g'(0)$ — 1
- $f'(x) = 2x \cdot (x - 1\frac{1}{2}) + (x^2 - 1) \cdot 1$ — 1
- $f'(0) = -1$ — 1
- $g'(x) = -1$, dus $g'(0) = -1$ (dus de grafieken van f en g raken elkaar in A) — 1

2 maximumscore 6

- De grafiek van f snijdt de x-as tussen O en B in $(1, 0)$ — 1
- De oppervlakte van het linkerdeel is $\int_0^1 (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2})\,\mathrm{d}x$ — 1
- $(x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2}) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$ — 1
- Een primitieve van $x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x$ — 1
- De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}$ — 1
- De oppervlakte van het rechterdeel is $\frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (en dat is de helft van de oppervlakte van het linkerdeel) — 1

Verzadigingsgraad van hemoglobine

3 maximumscore 3

- De vergelijking $75=\dfrac{100p^3}{p^3+25000}$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 42 (mmHg) 1

of

- De vergelijking $75=\dfrac{100p^3}{p^3+25000}$ moet worden opgelost 1
- $75=\dfrac{100p^3}{p^3+25000}$ geeft $100p^3=75p^3+1875000$ 1
- $25p^3=1875000$ geeft $p^3=75000$, dus $p=\sqrt[3]{75000}\approx 42$ (mmHg) 1

4 maximumscore 4

- $\dfrac{dv}{dp}=\dfrac{300p^2(p^3+25000)-100p^3\cdot 3p^2}{(p^3+25000)^2}$ (dus $\dfrac{dv}{dp}=\dfrac{7500000p^2}{(p^3+25000)^2}$) 2
- Beschrijven hoe de waarde van p waarvoor $\dfrac{dv}{dp}$ maximaal is, kan worden bepaald 1
- Het antwoord: 23 1

of

- $\dfrac{dv}{dp}=\dfrac{300p^2(p^3+25000)-100p^3\cdot 3p^2}{(p^3+25000)^2}$ (dus $\dfrac{dv}{dp}=\dfrac{7500000p^2}{(p^3+25000)^2}$) 2
- $\dfrac{d^2v}{dp^2}=\dfrac{15000000p\cdot(p^3+25000)^2-7500000p^2\cdot 6p^2(p^3+25000)}{(p^3+25000)^4}$ 1
- Algebraïsch of met GR $\dfrac{d^2v}{dp^2}=0$ oplossen geeft het antwoord 23 (want uit de grafiek blijkt dat de afgeleide voor deze waarde van p maximaal is) 1

5 maximumscore 4

- Uit $\dfrac{v}{100-v}=0,00004p^3$ volgt $v=0,00004p^3(100-v)$ 1
- Dit geeft $25000v=100p^3-vp^3$ 1
- Hieruit volgt $25000v+vp^3=100p^3$ 1
- Daaruit volgt $v(25000+p^3)=100p^3$, dus $v=\dfrac{100p^3}{p^3+25000}$ 1

Vermenigvuldigen in horizontale en verticale richting

6 maximumscore 4

- Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met e geeft de grafiek met vergelijking $y = \mathrm{e} \cdot \dfrac{1+\ln x}{x}$ — 1
- Deze vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ geeft de grafiek met vergelijking $y = \mathrm{e} \cdot \dfrac{1+\ln(\mathrm{e}x)}{\mathrm{e}x}$ — 1
- $\mathrm{e} \cdot \dfrac{1+\ln(\mathrm{e}x)}{\mathrm{e}x} = \dfrac{1+\ln \mathrm{e} + \ln x}{x}$ — 1
- $c = 1 + \ln \mathrm{e} = 2$ — 1

of

- Op de grafiek van f ligt het punt $(1, 1)$ — 1
- Het beeld van dit punt na de twee vermenigvuldigingen is $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$ — 1
- Dit punt ligt op de grafiek van g_c als $\mathrm{e} = \dfrac{c + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}$ — 1
- $c + \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1$ geeft $c = 2$ — 1

7 maximumscore 4

- De oppervlakte is $\int_1^{\mathrm{e}} (g_3(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$ — 1
- $g_3(x) - f(x) = \dfrac{3+\ln x}{x} - \dfrac{1+\ln x}{x} = \dfrac{2}{x}$ — 1
- Een primitieve van $\dfrac{2}{x}$ is $2\ln x$ — 1
- De oppervlakte is $2\ln \mathrm{e} - 2\ln 1 = 2$ — 1

Gelijke hoeken

8	**maximumscore 3**	
	• $\angle ADB = \angle ACD$; *hoek tussen koorde en raaklijn*	2
	• Verder $\angle A = \angle A$, dus $\Delta ABD \sim \Delta ADC$; *hh*	1
	of	
	• Kies E op het verlengde van AD, dan $\angle DBC = \angle EDC$; *hoek tussen koorde en raaklijn*	1
	• $\angle ABD = 180° - \angle CBD$ en $\angle ADC = 180° - \angle EDC$; *gestrekte hoek*, dus $\angle ABD = \angle ADC$	1
	• Verder $\angle A = \angle A$, dus $\Delta ABD \sim \Delta ADC$; *hh*	1
9	**maximumscore 4**	
	• $\angle PQD = 180° - \angle ADC - \frac{1}{2}\angle A$; *hoekensom driehoek*	1
	• $\angle APB = 180° - \angle ABD - \frac{1}{2}\angle A$; *hoekensom driehoek*	1
	• Verder $\angle ADC = \angle ABD$, dus $\angle PQD = \angle APB$	1
	• $\angle QPD = \angle APB$; *overstaande hoeken*, dus $\angle PQD = \angle QPD$	1
	of	
	• $\angle QPD = \frac{1}{2}\angle A + \angle ADB$; *buitenhoek driehoek*	1
	• $\angle PQD = \frac{1}{2}\angle A + \angle ACD$; *buitenhoek driehoek*	1
	• $\angle ACD = \angle ADB$, dus $\angle PQD = \angle QPD$	2
	of	
	• Uit $\Delta ABD \sim \Delta ADC$ volgt $\angle ABP = \angle ADQ$	1
	• Verder $\angle BAP = \angle DAQ$, dus $\Delta ABP \sim \Delta ADQ$; *hh*	1
	• Hieruit volgt $\angle APB = \angle AQD$ $(= \angle PQD)$	1
	• $\angle APB = \angle QPD$; *overstaande hoeken*, dus $\angle PQD = \angle QPD$	1

Een hartvormige kromme

10 maximumscore 8

•	$y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$	2
•	In het punt met maximale y-coördinaat geldt $y'(t) = 0$ (en $x'(t) \neq 0$)	1
•	Dit geeft $\cos t = \cos(2t)$	1
•	Dus $t = 2t + k \cdot 2\pi$ of $t = -2t + k \cdot 2\pi$ (met k geheel)	1
•	Dus $t = k \cdot 2\pi$ of $t = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ (met k geheel)	1
•	Het punt met maximale y-coördinaat wordt bereikt voor $t = \frac{2}{3}\pi$	1
•	De y-coördinaat van dit punt is $2\sin(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{4}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

of

•	$y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$	2
•	In het punt met maximale y-coördinaat geldt $y'(t) = 0$ (en $x'(t) \neq 0$)	1
•	$\cos t - \cos(2t) = -2\sin(1\frac{1}{2}t)\sin(-\frac{1}{2}t)$	1
•	Dus $\sin(1\frac{1}{2}t) = 0$ of $\sin(-\frac{1}{2}t) = 0$, dus $1\frac{1}{2}t = k \cdot \pi$ of $-\frac{1}{2}t = k \cdot \pi$	1
•	Dus $t = k \cdot 2\pi$ of $t = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ (met k geheel)	1
•	Het punt met maximale y-coördinaat wordt bereikt voor $t = \frac{2}{3}\pi$	1
•	De y-coördinaat van dit punt is $2\sin(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{4}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

of

•	$y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$	2
•	In het punt met maximale y-coördinaat geldt $y'(t) = 0$ (en $x'(t) \neq 0$)	1
•	$2\cos t - 2\cos(2t) = 2\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) = 0$ geeft $\cos^2 t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2} = 0$	1
•	$(\cos t - 1)(\cos t + \frac{1}{2}) = 0$ geeft $\cos t = 1$ of $\cos t = -\frac{1}{2}$	1
•	Dus $t = k \cdot 2\pi$ of $t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel)	1
•	Het punt met maximale y-coördinaat wordt bereikt voor $t = \frac{2}{3}\pi$	1
•	De y-coördinaat van dit punt is $2\sin(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{4}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Opmerking
Als de vergelijking $2\cos t - 2\cos(2t) = 0$ niet algebraïsch maar met de GR is opgelost, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.

11 **maximumscore 6**

- De vergelijking $2\cos t - \cos(2t) = 1$ moet worden opgelost — 1
- Dit geeft $2\cos t - (2\cos^2 t - 1) = 1$ — 1
- Hieruit volgt $\cos t - \cos^2 t = 0$ — 1
- Dus $\cos t = 0$ of $\cos t = 1$ — 1
- Dit geeft $t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$ — 1
- $y(\frac{1}{2}\pi) = 2$ (of $y(1\frac{1}{2}\pi) = -2$), dus $a = 2$ — 1

Opmerking
Als de vergelijking $2\cos t - \cos(2t) = 1$ *niet algebraïsch maar met de GR is opgelost, voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.*

De leeftijd van ons zonnestelsel

12 maximumscore 3

- Voor de halveringstijd t geldt $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ — 1
- Hieruit volgt $-\lambda t = \ln \frac{1}{2}$ — 1
- $t = \dfrac{\ln \frac{1}{2}}{-\lambda} = \dfrac{\ln \frac{1}{2}}{-1,42 \cdot 10^{-11}}$, dus de gevraagde tijd is (ongeveer) 49 miljard (of $4,9 \cdot 10^{10}$) (jaar) — 1

13 maximumscore 3

- Uit $a(t) + b(t) = a(0) + b(0)$ volgt $a(t) + b(t) - a(0) = b(0)$ — 1
- Uit $a(t) = a(0) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$ volgt $a(0) = a(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ — 1
- Dus $a(t) + b(t) - a(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = b(0)$, ofwel $b(t) + \left(1 - \mathrm{e}^{\lambda t}\right) a(t) = b(0)$ — 1

of

- $b(t) + \left(1 - \mathrm{e}^{\lambda t}\right) a(t) = a(0) + b(0) - a(t) + \left(1 - \mathrm{e}^{\lambda t}\right) a(t)$ — 1
- $a(0) + b(0) - a(t) + \left(1 - \mathrm{e}^{\lambda t}\right) a(t) = a(0) + b(0) - a(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ — 1
- $a(0) + b(0) - a(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = a(0) + b(0) - a(0) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = b(0)$ (dus $b(t) + \left(1 - \mathrm{e}^{\lambda t}\right) a(t) = b(0)$) — 1

14 maximumscore 4

- Invullen van de tabelgegevens geeft $0,739 + \left(1 - \mathrm{e}^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}\right) 0,60 = b(0)$ en $0,713 + \left(1 - \mathrm{e}^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}\right) 0,20 = b(0)$ — 1
- (Omdat $b(0)$ voor elke meteoriet hetzelfde is, geldt) $0,739 - \left(\mathrm{e}^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} - 1\right) 0,60 = 0,713 - \left(\mathrm{e}^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} - 1\right) 0,20$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 4 miljard (of $4 \cdot 10^{9}$) (jaar) — 1

Koordenvierhoek

15 maximumscore 5

- $\angle ADB = \angle BCA$; *constante hoek* 1
- $\angle DAE = \angle ADE = \angle ADB$ en $\angle CBF = \angle BCF = \angle BCA$; *gelijkbenige driehoek* 1
- $\angle AEB = 2 \cdot \angle ADB$ en $\angle AFB = 2 \cdot \angle BCA$; *buitenhoek driehoek* 1
- Dus $\angle AEB = \angle AFB$ 1
- Dus *A*, *B*, *F* en *E* liggen op een cirkel; *constante hoek* 1

16 maximumscore 4

- $\angle ABE = \angle AFE$; *constante hoek* 1
- $\angle ABD = \angle ACD$; *constante hoek* 1
- Dus $\angle AFE = \angle ACD$ 1
- Dus $EF \, // \, DC$; *F-hoeken* 1

Lijnstuk en parabool

17 maximumscore 4

- Het midden van lijnstuk PR is $(\frac{1}{2}a, 4)$ — 1
- Er moet gelden: $f(\frac{1}{2}a) = 4$ — 1
- Dus $8 - \frac{1}{8}a^2 = 4$ — 1
- Hieruit volgt $a^2 = 32$, dus (wegens $a > 0$) $a = 4\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- Voor het snijpunt van lijnstuk PR en de grafiek van f geldt $8 - \frac{8}{a} \cdot x = 8 - \frac{1}{2}x^2$ — 1
- Dit geeft $x = 0$ of $x = \frac{16}{a}$ — 1
- Het snijpunt met x-coördinaat $\frac{16}{a}$ is het midden van PR als $\frac{16}{a} = \frac{1}{2}a$ — 1
- Hieruit volgt $a^2 = 32$, dus (wegens $a > 0$) $a = 4\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- $y = 4$ geeft $8 - \frac{1}{2}x^2 = 4$ — 1
- Dit geeft (wegens $x > 0$) $x = \sqrt{8}$ — 1
- $\frac{1}{2}a = \sqrt{8}$ — 1
- Hieruit volgt $a = 4\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

18 maximumscore 5

- Beschrijven hoe $\int_0^4 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$ kan worden berekend — 1
- De lengte van boog PQ is (ongeveer) 9,294 — 1
- De lengte van lijnstuk PR is $\sqrt{64 + a^2}$ — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\sqrt{64 + a^2} = 9{,}294$ kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 4,73 — 1