Vraag	Antwoord	Scores

Een regenton

1 **maximumscore 5**

•	$V = \pi\int_0^h (r(x))^2\,\mathrm{d}x$	1
•	$(r(x))^2 = \frac{1}{100}\left(5+15x-15x^2\right)$	1
•	Een primitieve van $5+15x-15x^2$ is $5x+7\frac{1}{2}x^2-5x^3$	1
•	Dus $V = \frac{\pi}{100}\left(5h+7\frac{1}{2}h^2-5h^3\right)$	1
•	$V = \frac{\pi}{100}\cdot 2\frac{1}{2}\left(2h+3h^2-2h^3\right) = \frac{\pi}{40}\left(2h+3h^2-2h^3\right)$	1

2 **maximumscore 5**

•	Het volume van de regenton is $\frac{3\pi}{40}$ ($\approx 0,236$) (m^3) (of nauwkeuriger)	1
•	$\frac{3}{4}\cdot\frac{3\pi}{40} = \frac{9\pi}{160}$ ($\approx 0,177$) (of nauwkeuriger)	1
•	Voor de waterhoogte *h* geldt: $\frac{\pi}{40}\left(2h+3h^2-2h^3\right) = \frac{9\pi}{160}$ (of $\frac{\pi}{40}\left(2h+3h^2-2h^3\right)\approx 0,177$)	1
•	Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost	1
•	Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm)	1

of

•	Voor $h=1$ is $2h+3h^2-2h^3$ gelijk aan 3	1
•	Voor de waterhoogte *h* moet gelden: $2h+3h^2-2h^3 = \frac{3}{4}\cdot 3$	2
•	Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost	1
•	Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm)	1

Een ellipsvormige baan

3 maximumscore 3

- De afstand van P tot de oorsprong op tijdstip t is
  $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2+\left(\sin\left(t+\frac{1}{3}\pi\right)\right)^2}$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van deze afstand kan worden bepaald 1
- Het antwoord: 1,04 1

4 maximumscore 4

- $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cos t$ 1
- $\frac{dy}{dt}=\cos\left(t+\frac{1}{3}\pi\right)$ 1
- Voor $t=0$ geldt: $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$ en $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}$ 1
- De snelheid is dan $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een vergelijkbare uitdrukking) 1

5 maximumscore 6

- In A en B geldt: $\sin\left(t+\frac{1}{3}\pi\right)=\sin t$ 1
- Dus $t+\frac{1}{3}\pi=t+k\cdot 2\pi$ of $t+\frac{1}{3}\pi=\pi-t+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Hieruit volgt voor $0\le t\le 2\pi$: $t=\frac{1}{3}\pi$ of $t=1\frac{1}{3}\pi$ 2
- Dus de coördinaten van A zijn $\left(\frac{1}{4}\sqrt{3},\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en de coördinaten van B zijn
  $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{3},-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ 2

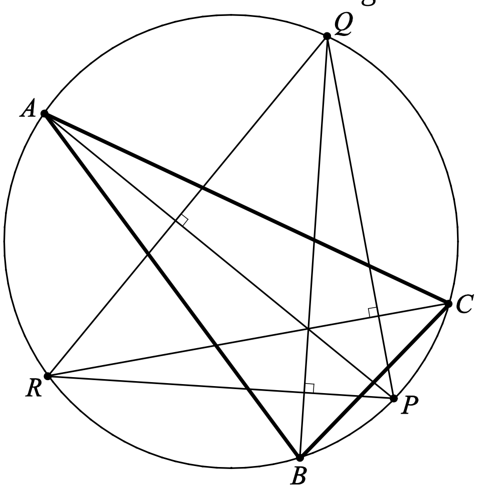
Bissectrices en omgeschreven cirkel

6 maximumscore 3

- $\angle CPQ = \angle CBQ = \angle ABQ = \angle APQ$; *constante hoek (, bissectrice)* 1
- $\angle CQP = \angle CAP = \angle BAP = \angle BQP$; *constante hoek (, bissectrice)* 1
- (Verder $PQ = PQ$, dus) $\Delta CPQ \cong \Delta SPQ$; *HZH* 1

7 maximumscore 3

- De lijn door *R* loodrecht op *PQ* tekenen; het tweede snijpunt van deze lijn met de cirkel is punt *C* 1
- De andere twee hoekpunten van de driehoek op soortgelijke wijze vinden 1
- De rest van de tekening 1



of

- De lijn door *R* loodrecht op *PQ* tekenen; het tweede snijpunt van deze lijn met de cirkel is punt *C* 1
- Het punt *S* tekenen als beeld van *C* bij spiegelen in *PQ* 1
- De rest van de tekening 1

Medicijn in actieve vorm

8 maximumscore 3

- Er moet gelden $\mathrm{e}^{-k\cdot t_{99}}=0,01$ 2
- Dus $t_{99}=\dfrac{\ln 100}{k}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)
  (of $t_{99}=\dfrac{4,6}{k}$ (of nauwkeuriger)) 1

Opmerking
Als met $\mathrm{e}^{-k\cdot t_{99}}=0,99$ *is gerekend, dan voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.*

9 maximumscore 4

- $a'(t)=25\left(-0,1\cdot\mathrm{e}^{-0,1\cdot t}+0,4\cdot\mathrm{e}^{-0,4\cdot t}\right)$ 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $25\left(-0,1\cdot\mathrm{e}^{-0,1\cdot t}+0,4\cdot\mathrm{e}^{-0,4\cdot t}\right)=0$ kan worden opgelost 1
- $t_{\max}\approx 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{\max}=\frac{10}{3}\ln 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)) 1

10 maximumscore 6

- Beschrijven hoe met de GR het maximum van $a(t)$ berekend kan worden 1
- Dit maximum is (ongeveer) 11,8 1
- Beschrijven hoe met de GR de t-waarden die behoren bij de snijpunten met de horizontale lijn op hoogte 5,9 gevonden kunnen worden 1
- De t-waarden zijn (ongeveer) 1,0 en 14,3 (of nauwkeuriger) 2
- Het antwoord: 13 (uur) 1

of

- Substitutie van $t_{\max}=4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{\max}=\frac{10}{3}\ln 4$) in de formule voor $a(t)$ geeft $a_{\max}\approx 11,8$ (of nauwkeuriger) 1
- Opgelost moet worden $25\left(\mathrm{e}^{-0,1\cdot t}-\mathrm{e}^{-0,4\cdot t}\right)=\frac{1}{2}\cdot 11,8$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $t\approx 1,0$ of $t\approx 14,3$ (of nauwkeuriger) 2
- Het antwoord: 13 (uur) 1

Onafhankelijk van *p*

11 maximumscore 8

- $f(x)=0$ geeft ($x=0$ of) $x=3p$ (dus de x-coördinaat van A is $3p$) 1
- De oppervlakte van het grijze gebied is $\left[-\frac{1}{4}x^4+px^3\right]_0^{3p}$ 1
- Dit is $-\frac{1}{4}(3p)^4+p(3p)^3=-\frac{81}{4}p^4+27p^4=\frac{27}{4}p^4$ 1
- $f'(x)=-3x^2+6px$ 1
- $f'(x)=0$ geeft ($x=0$ of) $x=2p$ (dus de x-coördinaat van T is $2p$) 1
- $f(2p)=-(2p)^3+3p\cdot(2p)^2=4p^3$ (dus de y-coördinaat van T is $4p^3$) 1
- De oppervlakte van $OABC$ is dus $3p\cdot 4p^3=12p^4$ 1
- Dus de verhouding van de oppervlakten is
  $\frac{27}{4}p^4:12p^4=\frac{27}{4}:12$ ($=9:16$) (en dit is onafhankelijk van p) 1

Opmerking
Als slechts voor een aantal waarden van p de verhouding is uitgerekend en dan geconcludeerd is dat de verhouding telkens gelijk is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

Drie halve cirkels

12 maximumscore 3

- Uit de gelijkvormigheid van driehoek ACE en driehoek CBF volgt
  $BF=3x$ 1
- Dus $CF=\sqrt{3^2-(3x)^2}=3\sqrt{1-x^2}$ (;*Pythagoras*) 1
- De oppervlakte van $CFDE$ is dus $x\cdot 3\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x^2-x^4}$ 1

of

- Uit de gelijkvormigheid van driehoek ACE en driehoek CBF volgt
  $CF=3\cdot AE$ 1
- Dus $CF=3\sqrt{1-x^2}$ (;*Pythagoras*) 1
- De oppervlakte van $CFDE$ is dus $x\cdot 3\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x^2-x^4}$ 1

13 maximumscore 5

- $3\sqrt{x^2 - x^4} = \sqrt{2}$ geeft $9x^4 - 9x^2 + 2 = 0$ 2
- $(3x^2 - 1)(3x^2 - 2) = 0$ (of de abc-formule gebruiken of kwadraat afsplitsen) 1
- Dit geeft $x^2 = \frac{1}{3}$ of $x^2 = \frac{2}{3}$ 1
- Dus de lengte van CE is $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $(= \frac{1}{3}\sqrt{6})$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

14 maximumscore 7

- De afgeleide van $3\sqrt{x^2 - x^4}$ is $3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x^4}} \cdot (2x - 4x^3)$ 2
- De afgeleide is 0 als $2x - 4x^3 = 0$ (en $x^2 - x^4 \neq 0$) 1
- Dit geeft $x^2 = \frac{1}{2}$, dus als de oppervlakte van $CFDE$ maximaal is, is de lengte van CE $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- De oppervlakte van rechthoek $CFDE$ is dan $3\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ 1
- De lengte van DE is dan $\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking), dus $CFDE$ is geen vierkant 1

of

- De afgeleide van $3\sqrt{x^2 - x^4}$ is $3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x^4}} \cdot (2x - 4x^3)$ 2
- De afgeleide is 0 als $2x - 4x^3 = 0$ (en $x^2 - x^4 \neq 0$) 1
- Dit geeft $x^2 = \frac{1}{2}$, dus als de oppervlakte van $CFDE$ maximaal is, is de lengte van CE $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- Als $CFDE$ bij maximale oppervlakte een vierkant is, is deze oppervlakte $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 1
- Invullen van $x^2 = \frac{1}{2}$ in de formule voor de oppervlakte van de rechthoek $CFDE$ geeft als uitkomst $3\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$, dus $CFDE$ is geen vierkant 1

of

- $3\sqrt{x^2 - x^4}$ is maximaal als $x^2 - x^4$ maximaal is 2
- De afgeleide van $x^2 - x^4$ is $2x - 4x^3$ 1
- $2x - 4x^3 = 0$ geeft $x^2 = \frac{1}{2}$, dus als de oppervlakte van $CFDE$ maximaal is, is de lengte van CE $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- Dan geldt $CF = 3 \cdot AE = 3\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$, dus $CFDE$ is geen vierkant 2

of

- De rechthoek is een vierkant als $3\sqrt{1 - x^2} = x$ 1
- Dit geeft $9(1 - x^2) = x^2$, dus $x^2 = \frac{9}{10}$, dus $x = \sqrt{\frac{9}{10}}$ 2
- De afgeleide van $3\sqrt{x^2 - x^4}$ is $3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - x^4}} \cdot (2x - 4x^3)$ 2
- De afgeleide waarde voor $x = \sqrt{\frac{9}{10}}$ is $3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{9}{10} - \frac{81}{100}}} \cdot \left(2\sqrt{\frac{9}{10}} - 4 \cdot \frac{9}{10} \cdot \sqrt{\frac{9}{10}}\right)$ 1
- Dit is niet gelijk aan 0, dus als de oppervlakte van $CFDE$ maximaal is, is $CFDE$ geen vierkant 1

Kleinste amplitude

15 maximumscore 8

- De amplitude van de grafiek van f_a is $A(a) = \dfrac{a}{\ln a}$ 2
- $A'(a) = \dfrac{1 \cdot \ln a - a \cdot \frac{1}{a}}{(\ln a)^2} = \dfrac{\ln a - 1}{(\ln a)^2}$ 2
- $A'(a) = 0$ geeft $a = \mathrm{e}$ (dus de kleinste amplitude is e) 1
- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $\int_0^{\pi} \mathrm{e} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\sin x$ is $-\cos x$ 1
- De gevraagde oppervlakte is 2e 1

Vier punten op een cirkel

16 maximumscore 4

- $\angle ABP' = 90°$; *raaklijn* 1
- Dus $\angle AP'B = 90° - \angle BAP$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle APB = 90°$; *Thales* 1
- Dus $\angle ABP = 90° - \angle BAP$; *hoekensom driehoek* (dus $\angle ABP = \angle AP'B$) 1

of

- $\angle P'BP = \angle BAP$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- $\angle APB = 90°$; *Thales* 1
- Dus $\angle P'PB = 180° - \angle APB = 90°$; *gestrekte hoek* 1
- Dus $\angle ABP = 90° - \angle BAP = 90° - \angle P'BP = \angle AP'B$; *hoekensom driehoek* 1

of

- $\angle ABP' = 90°$; *raaklijn* 1
- $\angle APB = 90°$; *Thales* 1
- $\angle APB = \angle ABP'$ en $\angle BAP = \angle P'AB$, dus de driehoeken APB en ABP' zijn gelijkvormig; *hh*, dus $\angle ABP = \angle AP'B$ 2

17 maximumscore 4

- $\angle PQQ' + \angle AQP = 180°$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle AQP = \angle ABP$; *constante hoek* 1
- Uit $\angle ABP = \angle AP'B$ en $\angle AQP = \angle ABP$ volgt $\angle AQP = \angle AP'B$ 1
- Dus $\angle PQQ' + \angle AP'B = 180°$ en hieruit volgt $PQQ'P'$ is een koordenvierhoek (dus P, Q, Q' en P' liggen op één cirkel; *koordenvierhoek*) 1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 22 juni naar Cito.

einde ■