Vraag	Antwoord	Scores

Onafhankelijk van *a*

1 maximumscore 3

- $F_a'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-ax} + x \cdot \mathrm{e}^{-ax} \cdot -a$ 2
- Dit geeft $F_a'(x) = (1 - ax) \cdot \mathrm{e}^{-ax}$ (en dit is gelijk aan $f_a(x)$, dus F_a is een primitieve functie van f_a) 1

2 maximumscore 5

- De oppervlakte van driehoek OAB is $\frac{1}{2a}$ 1
- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a, de x-as en de y-as is $\int_0^{\frac{1}{a}} (1 - ax) \cdot \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{d}x = \left[x \cdot \mathrm{e}^{-ax} \right]_0^{\frac{1}{a}}$ (of: $F_a(\frac{1}{a}) - F_a(0)$) 1
- Deze oppervlakte is dus $\frac{1}{\mathrm{e}a}$ 1
- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a en het lijnstuk AB is dus $\frac{1}{2a} - \frac{1}{\mathrm{e}a}$ 1
- De verhouding is $(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\mathrm{e}a}) : \frac{1}{\mathrm{e}a} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}) : \frac{1}{\mathrm{e}}$, dus onafhankelijk van a 1

of

- De grafiek van f_a en het bijbehorende lijnstuk AB ontstaan uit de grafiek van f_1 en het daarbij behorende lijnstuk AB door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{a}$ 2
- Hierbij worden zowel de oppervlakte van de driehoek als de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_1, de x-as en de y-as vermenigvuldigd met $\frac{1}{a}$ 2
- De verhouding van deze oppervlakten is dus onafhankelijk van a en daarmee ook de gevraagde verhouding 1

of

- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a, de x-as en de y-as is $\int_0^{\frac{1}{a}} (1 - ax) \cdot \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{d}x = \left[x \cdot \mathrm{e}^{-ax} \right]_0^{\frac{1}{a}}$ (of: $F_a(\frac{1}{a}) - F_a(0)$) 1
- Deze oppervlakte is dus $\frac{1}{\mathrm{e}a}$ 1
- De oppervlakte van driehoek OAB is $\frac{1}{2a}$ 1
- De verhouding van deze oppervlakten is onafhankelijk van a 1
- Dus is ook de gevraagde verhouding onafhankelijk van a 1

Het standaard proefglas

3 maximumscore 4

- Het volume (in mm^3) is $\int_{0,0}^{55,3} \pi\left(f(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x$ 1
- Beschrijven hoe deze integraal (met de GR) berekend kan worden 1
- De uitkomst van deze integraal is (ongeveer) 7994 1
- Het antwoord: 8 (cm^3) 1

4 maximumscore 5

- ($C(87{,}5;\, 32{,}5)$ is de top van de parabool, dus) een formule voor kromme *CD* is van de vorm $y = a(x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$ 2
- $D(155{,}0;\, 23{,}0)$ is een punt van de kromme *CD*, dus $23{,}0 = a(155{,}0 - 87{,}5)^2 + 32{,}5$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Dit geeft voor *a* de waarde –0,002 (of nauwkeuriger) (dus een formule voor kromme *CD* is $y = -0{,}002 \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$) 1

of

- (De coördinaten van *C* zijn $(87{,}5;\, 32{,}5)$, dus) de translatie is 87,5 naar rechts en 32,5 omhoog 1
- (Bij deze translatie wordt *E* afgebeeld op $D(155{,}0;\, 23{,}0)$, dus) de coördinaten van *E* zijn (67,5; −9,5) 1
- De kromme *OE* heeft een formule van de vorm $y = ax^2$, dus $-9{,}5 = a \cdot 67{,}5^2$ 1
- Dit geeft voor *a* de waarde –0,002 (of nauwkeuriger) 1
- Dus een formule voor kromme *CD* is $y = -0{,}002 \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$ 1

5 maximumscore 6

- $50 \text{ ml} = 50\,000 \text{ mm}^3$ 1
- Gevraagd wordt de waarde van *h* waarvoor $\int_{55,3}^{h} \pi\left(g(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = 50\,000$, waarbij *h* de *x*-coördinaat van *P* is 1
- Een primitieve van $-x^2 + 175x - 6600$ is $-\frac{1}{3}x^3 + 87{,}5x^2 - 6600x$ 1
- $\pi\left(\left(-\frac{1}{3}h^3 + 87{,}5h^2 - 6600h\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 55{,}3^3 + 87{,}5 \cdot 55{,}3^2 - 6600 \cdot 55{,}3\right)\right) = 50\,000$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- ($h \approx 81$, dus) de *x*-coördinaat van *P* is 81 1

Vanuit een parallellogram

6 maximumscore 3

- $AD//BC$, dus $\angle ADE = \angle BED$; (*parallellogram*), *Z-hoeken* 1
- $\angle ADE = \angle BDE$; *bissectrice* 1
- Hieruit volgt $\angle BED = \angle BDE$, dus driehoek BDE is gelijkbenig; *gelijkbenige driehoek* 1

7 maximumscore 4

- $\angle BDF = \angle EBF$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- (Omdat driehoek BDE gelijkbenig is, geldt) $\angle BEF = \angle BDF$ (dus $\angle BEF = \angle EBF$) 1
- $\angle BFD = \angle EBF + \angle BEF$; *buitenhoek driehoek* 1
- Dus $\angle BFD = \angle BEF + \angle BEF = 2 \cdot \angle BEF$ 1

Tussen twee sinusgrafieken

8 maximumscore 4

- De oppervlakte van V is $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $f(x) - g(x)$ is $-\cos x + \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ 2
- De oppervlakte van V is dus $\left[-\cos x + \cos(x + \frac{1}{3}\pi) \right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = 2$ 1

9 maximumscore 4

- $f(x) + g(x) = \sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 2\sin\left(\frac{x + x + \frac{1}{3}\pi}{2} \right)\cos\left(\frac{x - (x + \frac{1}{3}\pi)}{2} \right)$ 1
- $f(x) + g(x) = 2\sin(x + \frac{1}{6}\pi)\cos(-\frac{1}{6}\pi)$ 1
- Dit geeft $\frac{1}{2} \cdot \left(f(x) + g(x) \right) = \sin(x + \frac{1}{6}\pi) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1
- Dus (bijvoorbeeld) $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $b = \frac{1}{6}\pi$ 1

of

- $f(x) + g(x) = 0$ geeft $\sin(-x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ 1
- Dit geeft $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$, dus (bijvoorbeeld) $b = \frac{1}{6}\pi$ 1
- Een toelichting dat het maximum van $f + g$ ligt bij $x = \frac{1}{3}\pi$ 1
- Hieruit volgt (omdat $\frac{1}{2} \cdot \left(f(\frac{1}{3}\pi) + g(\frac{1}{3}\pi) \right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en omdat $\sin(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi) = 1$) $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

Drie vierkanten in een rechthoek

10 maximumscore 8

- De lengte van de zijde van B is $30-x$ 1
- De lengte van de zijde van C is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$ 1
- De oppervlakte van D is $20\cdot 30-x^2-(30-x)^2-(x-10)^2$ 1
- $(30-x)^2=900-60x+x^2$ en $(x-10)^2=x^2-20x+100$ 1
- Dus de oppervlakte van D is $600-x^2-900+60x-x^2-x^2+20x-100$ 1
- Deze uitdrukking vereenvoudigen tot $-3x^2+80x-400$ 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze berekend kan worden voor welke waarde van x (in het interval [10; 20]) dit maximaal is 1
- De gevraagde waarde van x is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

of

- De lengte van de zijde van B is $30-x$ 1
- De lengte van de zijde van C is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$ 1
- De oppervlakte van D is maximaal als de totale oppervlakte van A, B en C minimaal is 1
- De totale oppervlakte van A, B en C is $x^2+(30-x)^2+(x-10)^2$ 1
- $(30-x)^2=900-60x+x^2$ en $(x-10)^2=x^2-20x+100$ 1
- Dus de totale oppervlakte van A, B en C is $3x^2-80x+1000$ 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze berekend kan worden voor welke waarde van x (in het interval [10; 20]) dit minimaal is 1
- De gevraagde waarde van x is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

of

- De lengte van de zijde van B is $30-x$ 1
- De lengte van de zijde van C is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$ 1
- De oppervlakte van D is $20\cdot 30-x^2-(30-x)^2-(x-10)^2$ 1
- $D'(x)=-2x+2(30-x)-2(x-10)$ 2
- Dit geeft $D'(x)=-6x+80$ 1
- Er moet (in het interval [10; 20]) gelden $D'(x)=0$, dus $-6x+80=0$ 1
- De gevraagde waarde van x is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

Een W

11 maximumscore 5

- P passeert de lijn met vergelijking $y = x$ als $\cos\left(\frac{4\pi}{15}\cdot t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{15}\cdot t\right)$ 1
- Beschrijven hoe de oplossingen van deze vergelijking op het interval [0, 15] gevonden kunnen worden 1
- Deze oplossingen zijn $t = 0$, $t = 6$, $t = 10$ en $t = 12$ 2
- P bevindt zich onder de lijn gedurende de tijdsintervallen $\langle 0, 6\rangle$ en $\langle 10, 12\rangle$, dus het antwoord is 8 (seconden) 1

12 maximumscore 5

- P passeert de y-as als $\cos\left(\frac{\pi}{15}\cdot t\right) = 0$ 1
- Dus op weg van A naar B bijvoorbeeld op tijdstip $t = 7\frac{1}{2}$ 1
- $x'(t) = -\frac{\pi}{15}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{15}\cdot t\right)$ 2
- Dit geeft $x'(7\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{15}$, dus de gevraagde snelheid is $-\frac{\pi}{15}$ (m/s) 1

Opmerking
Als een kandidaat als antwoord $\frac{\pi}{15}$ (m/s) geeft, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Verschoven platen

13 maximumscore 4

- Driehoek POA is gelijkvormig met driehoek $PQ'Q$ (; *hh*) 1
- $\frac{PQ'}{PQ} = \frac{PO}{PA}$ en $PA = \sqrt{p^2 + 35^2}$ (; *Pythagoras*) geeft $\frac{p+q}{280} = \frac{p}{\sqrt{p^2+1225}}$ 2
- Hieruit volgt $p + q = \frac{280p}{\sqrt{p^2+1225}}$, dus $q = \frac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ 1

14 maximumscore 4

- $q'(p) = \dfrac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - 280p\cdot\dfrac{2p}{2\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225} - 1$ 2
- Dus $q'(p) = \dfrac{280(p^2+1225) - 280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}} - 1$ 1
- De rest van de herleiding 1

15 **maximumscore 6**

- $q'(p)=0$ geeft $\dfrac{343\,000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}}-1=0$ — 1
- Dit geeft $(p^2+1225)^{\frac{3}{2}}=343\,000$ — 2
- Hieruit volgt $p^2+1225=4900$ — 1
- Dit geeft $p=\sqrt{3675}$ (of $p=35\sqrt{3}$) — 1
- Het antwoord: $q=3\sqrt{3675}$ (of $q=105\sqrt{3}$) — 1

Evenwijdige lijnen en een rechthoek

16 **maximumscore 4**

- $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$; *Thales* — 1
- $\angle BAC=\angle ACD$; *Z-hoeken*, dus driehoek *ABC* en driehoek *CDA* zijn congruent; *ZHH* (of: $\angle BAC=\angle ACD$; *Z-hoeken*, en $\angle ACB=90°-\angle BAC$ en $\angle CAD=90°-\angle ACD$; *hoekensom driehoek*) — 1
- Hieruit volgt $\angle CAD=\angle ACB$, dus $AD//BC$; *Z-hoeken* — 1
- $AB//CD$, $AD//BC$ en $\angle ABC=90^\circ$, dus vierhoek *ABCD* is een rechthoek; (*parallellogram*), *rechthoek* — 1

of

- $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$; *Thales* — 1
- $\angle BAC=\angle ACD$; *Z-hoeken*, dus driehoek *ABC* en driehoek *CDA* zijn congruent; *ZHH* (of: $\angle BAC=\angle ACD$; *Z-hoeken*, en $\angle ACB=90°-\angle BAC$ en $\angle CAD=90°-\angle ACD$; *hoekensom driehoek*) — 1
- Hieruit volgt $\angle CAD=\angle ACB$, dus $\angle BAD=\angle BCD$ — 1
- $\angle BAD+\angle BCD=180°$, dus $\angle BAD=\angle BCD=90°$, dus vierhoek *ABCD* is een rechthoek; *koordenvierhoek, rechthoek* — 1

17 **maximumscore 4**

- $\angle CSE=\angle CDE+\angle DEM$; *buitenhoek driehoek* — 1
- $\angle DEM=\angle CME$; *Z-hoeken* — 1
- $\angle CME=2\cdot\angle CDE$; *omtrekshoek* — 1
- Dus $\angle CSE=\angle CDE+2\cdot\angle CDE=3\cdot\angle CDE$ — 1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van de alfabetisch eerste vijf kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 29 mei naar Cito.