Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Oppervlakte en inhoud bij $f(x) = \mathrm{e}^x$

1 maximumscore 6

- Lijn AB heeft richtingscoëfficiënt $\dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$ — 1
- Voor lijn AB geldt de formule $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) \cdot x + 1$ — 1
- De oppervlakte van het vlakdeel is $\int_0^2 (\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) \cdot x + 1 - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) \cdot x + 1 - \mathrm{e}^x$ is $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 - 1) \cdot x^2 + x - \mathrm{e}^x$ — 2
- De gevraagde oppervlakte is 2 — 1

of

- De oppervlakte van het vlakdeel is het verschil tussen de oppervlakte van een trapezium en $\int_0^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ — 1
- De oppervlakte van het bedoelde trapezium is $\mathrm{e}^2 + 1$ — 2
- $\int_0^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 - 1$ — 2
- De gevraagde oppervlakte is 2 — 1

2 maximumscore 6

- De grafiek van $g(x) = \mathrm{e}^x - 1$ wordt om de x-as gewenteld — 1
- De inhoud is $\int_0^2 \pi \cdot (\mathrm{e}^x - 1)^2 \mathrm{d}x$ — 1
- $(\mathrm{e}^x - 1)^2 = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1$ — 1
- Een primitieve van $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1$ is $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + x$ — 2
- De inhoud is $\pi \cdot (\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^2 + 3\frac{1}{2})$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Met een gemeenschappelijk brandpunt

3 maximumscore 5

- $\angle(AP$, raaklijn aan $e_1) = \angle(BP$, raaklijn aan $e_1) = \alpha$; *raaklijneigenschap ellips* 1
- $\angle(AP$, raaklijn aan $e_2) = \angle(CP$, raaklijn aan $e_2) = \beta$; *raaklijneigenschap ellips* 1
- $\angle(CP$, raaklijn aan $e_1) = \angle(BP$, raaklijn aan $e_1) = \alpha$; *overstaande hoeken* 1
- $2\alpha + 2\beta = 180°$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle$(raaklijn aan e_1, raaklijn aan e_2) $= \alpha + \beta = 90°$ 1

4 maximumscore 4

- Uit de definitie van de ellips volgt $PA + PC = QA + QC$ 1
- Uit de definitie van de ellips volgt $PA + PB = QA + QB$ 1
- Hieruit volgt $PC - PB = QC - QB$ 1
- Volgens de definitie van de hyperbool liggen P en Q dus op eenzelfde hyperbool met brandpunten B en C 1

Vraag	Antwoord	Scores

Een parabool?

5 **maximumscore 4**

- $A(4, 4)$ en $B(-6, 6)$ — 1
- Als $a = 4$ is de formule $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$ — 1
- De coördinaten van A voldoen, want $4 = -\frac{1}{5} \cdot 4 + 4\frac{4}{5}$ — 1
- De coördinaten van B voldoen ook, want $6 = -\frac{1}{5} \cdot -6 + 4\frac{4}{5}$ (dus de formule is juist voor $a = 4$) — 1

of

- $A(4, 4)$ en $B(-6, 6)$ — 1
- De lijn door $A(4, 4)$ en $B(-6, 6)$ heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{5}$ — 1
- Voor lijn AB geldt dus $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 4)$, ofwel $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$ — 1
- $a = 4$ invullen in de gegeven formule geeft ook $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$ (dus de formule is juist voor $a = 4$) — 1

6 **maximumscore 4**

- Voor het snijpunt met de y-as geldt $y = -\frac{1}{5}a^2 + 2a$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = -\frac{2}{5}a + 2$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = 0$ geeft $a = 5$ — 1
- De grootste waarde van y is $-\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 5$ — 1

of

- Voor het snijpunt met de y-as geldt $y = -\frac{1}{5}a^2 + 2a$ — 1
- $-\frac{1}{5}a^2 + 2a = 0$ geeft $a(-\frac{1}{5}a + 2) = 0$ dus $a = 0$ of $a = 10$ — 1
- Hieruit volgt dat het maximum wordt aangenomen voor $a = 5$ — 1
- De grootste waarde van y is $-\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 5$ — 1

7 **maximumscore 6**

- De afgeleide van $\frac{1}{20}x^2 + 5$ is $\frac{1}{10}x$ — 1
- $x = 4$ invullen geeft $\frac{2}{5}$ als richtingscoëfficiënt van de raaklijn — 1
- Een vergelijking van de raaklijn in $(4, 5\frac{4}{5})$ is $y = \frac{2}{5}x + 4\frac{1}{5}$ — 1
- De raaklijn is een van de lijnen AB als $\frac{1}{5}a - 1 = \frac{2}{5}$ en $-\frac{1}{5}a^2 + 2a = 4\frac{1}{5}$ — 1
- $\frac{1}{5}a - 1 = \frac{2}{5}$ geeft $a = 7$ — 1
- $a = 7$ invullen in $-\frac{1}{5}a^2 + 2a$ geeft $4\frac{1}{5}$ (en dus is de raaklijn aan de parabool in $(4, 5\frac{4}{5})$ een van de lijnen AB) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Wisselingen in rijtjes kop en munt

8 **maximumscore 3**

- Op 5 van de 9 plekken moet een wisseling plaatsvinden; dit kan op $\binom{9}{5}$ manieren — 1
- $\binom{9}{5} = 126$ — 1
- Als de wisselingen vastliggen, kan een rijtje nog met een K of een M beginnen; dus zijn er $2 \cdot 126 = 252$ rijtjes met 5 wisselingen — 1

9 **maximumscore 3**

- De kans dat een rijtje ten minste één wisseling heeft, is $(1 - \frac{2}{1024} =)\ \frac{1022}{1024}$ — 1
- De kans op 20 keer zo'n rijtje is $(\frac{1022}{1024})^{20} \approx 0{,}962$ — 2

10 **maximumscore 5**

- De kans dat een willekeurig rijtje meer dan 5 wisselingen heeft, is $\frac{168+72+18+2}{1024} = \frac{260}{1024} = \frac{65}{256}$ — 1
- Het gaat om een binomiale kans met $n = 20$ en $p = \frac{65}{256}$ — 1
- Beschrijven hoe de binomiale kans $P(X \geq 9 \mid n = 20 \text{ en } p = \frac{65}{256})$ berekend kan worden, waarbij X het aantal rijtjes met meer dan 5 wisselingen is — 1
- De kans is (ongeveer) 0,045 — 1
- Deze kans is kleiner dan 5%, dus we vertrouwen Jolly niet — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Jupiter en Aarde

11 maximumscore 5

- De afstand is $\sqrt{(\cos 2\pi t - 5\cos\frac{1}{6}\pi t)^2 + (\sin 2\pi t - 5\sin\frac{1}{6}\pi t)^2}$ 1
- Dit is gelijk aan
$\sqrt{\cos^2 2\pi t - 10\cos 2\pi t \cdot \cos\frac{1}{6}\pi t + 25\cos^2\frac{1}{6}\pi t + \sin^2 2\pi t - 10\sin 2\pi t \cdot \sin\frac{1}{6}\pi t + 25\sin^2\frac{1}{6}\pi t}$ 1
- $\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t = 1$ en $\cos^2\frac{1}{6}\pi t + \sin^2\frac{1}{6}\pi t = 1$ 1
- Dus de afstand is $\sqrt{26 - 10(\cos 2\pi t \cdot \cos\frac{1}{6}\pi t + \sin 2\pi t \cdot \sin\frac{1}{6}\pi t)}$ 1
- Dus de afstand is $\sqrt{26 - 10\cos(\frac{11}{6}\pi t)}$ 1

12 maximumscore 5

- De snelheid is de afgeleide van $\sqrt{26 - 10\cos(\frac{11}{6}\pi t)}$ 1
- De afgeleide van $26 - 10\cos(\frac{11}{6}\pi t)$ is $\frac{110}{6}\pi \cdot \sin(\frac{11}{6}\pi t)$ 1
- De afgeleide van $\sqrt{26 - 10\cos(\frac{11}{6}\pi t)}$ is $\dfrac{\frac{110}{6}\pi \cdot \sin(\frac{11}{6}\pi t)}{2\sqrt{26 - 10\cos(\frac{11}{6}\pi t)}}$ 2
- Op tijdstip $t = 3$ is de snelheid (waarmee de afstand afneemt ongeveer) 5,65 (AE/jaar) (of: op tijdstip $t = 3$ is de snelheid (ongeveer) –5,65 (AE/jaar)) 1

Opmerking
Als de kettingregel niet gebruikt is, maximaal 3 punten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores

Met constante hoek

13 maximumscore 4

- Driehoek ABN is een gelijkbenige driehoek met tophoek ANB van 60°, dus de basishoek NAB is ook 60°; *gelijkbenige driehoek, hoekensom driehoek* — 2
- De hoek tussen de raaklijn in A en AN is 90°, dus de hoek tussen de raaklijn in A aan de cirkelboog met middelpunt N en lijn AB is 30°; *raaklijn* — 1
- De gevraagde hoek tussen de cirkelbogen is dus 60° — 1

14 maximumscore 4

- De gevraagde meetkundige plaats bestaat uit twee cirkelbogen op AB, met middelpunten X en Y, waarbij $\angle AXB = 90°$ en $\angle AYB = 90°$ — 1
- Het tekenen van de middelloodlijn van lijnstuk AB — 1
- Het tekenen van de punten X en Y — 1
- Het tekenen van de cirkelbogen — 1

15 maximumscore 3

- Als P_1 en P_2 aan verschillende kanten van AB liggen zó dat $\angle AP_1B = 140°$ en $\angle AP_2B = 40°$ en dus $\angle AP_1B + \angle AP_2B = 180°$, dan is vierhoek AP_1BP_2 een koordenvierhoek; *omgekeerde koordenvierhoekstelling* — 1
- Hieruit volgt dat A, P_1, B en P_2 op één cirkel liggen — 1
- De meetkundige plaats van alle punten P waarvoor $\angle APB = 140°$ bestaat uit twee cirkelbogen die de cirkelbogen die behoren bij $\angle APB = 40°$ aanvullen tot twee cirkels (met uitzondering van de punten A en B) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Rij en oppervlakte

16 maximumscore 3

- $R_{100} = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{\frac{i}{100}+1}$ 1
- Beschrijven hoe deze som berekend kan worden 1
- $R_{100} \approx 0,6907$ 1

of

- $R_{100} = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i+100}$ 1
- Beschrijven hoe deze som berekend kan worden 1
- $R_{100} \approx 0,6907$ 1

17 maximumscore 3

- De i-de rechthoek is $\frac{1}{n}$ breed en $\frac{1}{\frac{i}{n}+1}$ hoog 1
- De oppervlakte van de rechthoek is gelijk aan $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{i}{n}+1} = \frac{1}{i+n}$ 1
- Voor $i = 1$ geeft dit: $\frac{1}{1+n}$, voor $i = 2$: $\frac{1}{2+n}$, …, en voor $i = n$: $\frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$, dus $R_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \ldots + \frac{1}{2n}$ 1

18 maximumscore 4

- $R_{100} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200}$ 1
- $R_{99} = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \ldots + \frac{1}{198}$ 1
- $R_{100} - R_{99} = \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - \frac{1}{100}$ 1
- Het antwoord $\frac{1}{39800}$ 1

19 maximumscore 4

- $\lim_{n\to\infty} R_n$ is de oppervlakte onder de grafiek van f op [0, 1] 1
- De oppervlakte is gelijk aan $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{x+1}$ is $\ln(x+1)$ 1
- De oppervlakte is ln2 (dus $\lim_{n\to\infty} R_n = \ln 2$) 1