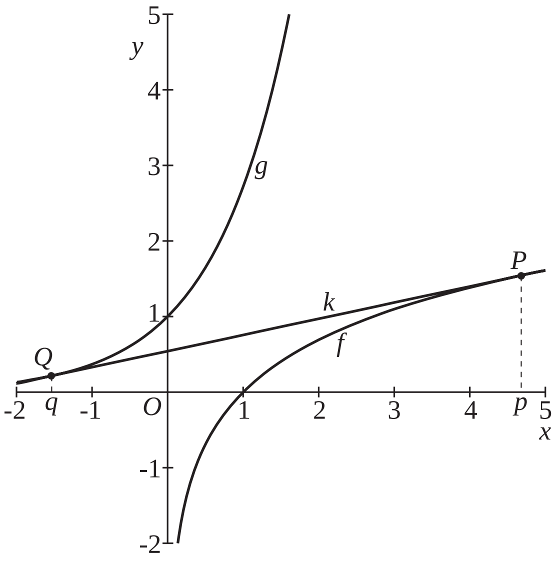
Een gemeenschappelijke raaklijn

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\ln(x)$ en $g(x)=\mathrm{e}^x$. In figuur 1 zijn de grafieken van beide functies getekend. De lijn k is een gemeenschappelijke raaklijn aan de grafieken van f en g. Het punt waarin k de grafiek van f raakt, noemen we $P(p,\ln(p))$, met $p>0$. Het punt waarin k de grafiek van g raakt, noemen we $Q(q,\mathrm{e}^q)$, met $q<0$.

figuur 1



Omdat k raaklijn is in punt P aan de grafiek van f, is $y=\frac{1}{p}x+\ln(p)-1$ een formule voor k.

3p **13** Toon dit aan.

Omdat k raaklijn is in punt Q aan de grafiek van g, is ook $y=\mathrm{e}^q x+\mathrm{e}^q(1-q)$ een formule voor k.

Uit de twee formules voor k kunnen we twee verbanden tussen p en q afleiden:
$\mathrm{e}^q=\dfrac{1}{p}$ (oftewel $p=\mathrm{e}^{-q}$) en $\mathrm{e}^q(1-q)=\ln(p)-1$.

Uit deze twee verbanden volgt dat q voldoet aan de vergelijking $\mathrm{e}^q=\dfrac{q+1}{q-1}$.

3p **14** Toon aan dat deze laatste vergelijking volgt uit de twee genoemde verbanden tussen p en q.

4p **15** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de richtingscoëfficiënt van de gemeenschappelijke raaklijn k.