Een benadering van een nulpunt

Voor elke positieve startwaarde x_0 is een rij x_0, x_1, x_2, … gegeven door de volgende recursievergelijking: $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$.

Deze recursievergelijking kunnen we ook schrijven als $x_{n+1} = g(x_n)$, waarbij $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ met $x > 0$.

In de figuur op de uitwerkbijlage zijn de grafiek van g en de lijn $y = x$ getekend.
In deze figuur is op de x-as een getal x_0 gekozen.

3p **1** Teken in deze figuur met behulp van een webgrafiek de bijbehorende plaatsen van x_1 en x_2 op de x-as.

De rij x_0, x_1, x_2, … convergeert. De grafiek van g heeft één top.

5p **2** Toon aan dat de limiet van de rij x_0, x_1, x_2, … exact gelijk is aan de x-coördinaat van de top van de grafiek van g.

Een nulpunt van een functie f kan in het algemeen snel benaderd worden met de recursievergelijking $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ bij een geschikte keuze van x_0.

Deze benaderingsmethode noemt men de methode van Newton-Raphson.
Passen we deze methode toe voor een benadering van het nulpunt $\sqrt{2}$ van $f(x) = x^2 - 2$ dan volgt hieruit de gegeven recursievergelijking $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$.

4p **3** Toon aan dat deze laatste vergelijking volgt uit de vergelijking $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

uitwerkbijlage

1