Een rij

De rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ is voor $n \geq 1$ vastgelegd door de recursievergelijking $u_n = \dfrac{1}{2 - u_{n-1}}$ met startwaarde $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

De rij $u_0, u_1, u_2, u_3,$ ... is convergent.

4p **1** Bereken exact de limiet van deze rij.

De eerste termen van de rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ zijn $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$.

Op grond hiervan wordt vermoed dat voor elke $n \geq 0$ de volgende formule geldt:

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

5p **2** Toon aan dat $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ voor elke $n \geq 1$ voldoet aan de recursievergelijking $u_n = \dfrac{1}{2 - u_{n-1}}$.

Onnodig ingewikkeld?

Een gezonde volwassene is ’s morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$$S = \ln(-0,00216t + 2,7183).$$

Hierin is t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan en S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan.

Dus $S = \dfrac{L}{L_0}$.

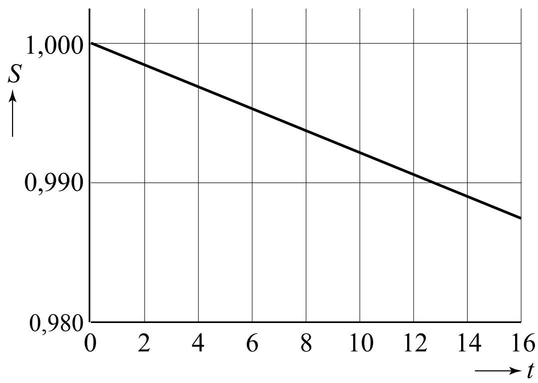
Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm.

4p **3** Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

We gaan er in het vervolg van de opgave van uit dat een persoon na het opstaan 16 uur actief is, dus na 16 uur weer gaat slapen.

In figuur 1 is de grafiek van S als functie van t getekend. Deze grafiek lijkt zo op het eerste gezicht een rechte lijn, maar door de formule weten wij dat dit niet zo is.

figuur 1



6p **4** Leg met behulp van de tweede afgeleide uit of er voor $0 \leq t \leq 16$ sprake is van toenemende of afnemende daling.

De grafiek van S valt nagenoeg samen met de rechte lijn door de punten $(0; 1,0000)$ en $(16; 0,9872)$. Is de formule van S met de natuurlijke logaritme, zoals gepubliceerd door de Australische wetenschapper, niet onnodig ingewikkeld? We zouden voor S ook gewoon een lineaire functie van t kunnen nemen.

We vergelijken daarom de formule $S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$ met de formule $S = -0,0008t + 1,0000$ die hoort bij de rechte lijn door de punten $(0; 1,0000)$ en $(16; 0,9872)$.

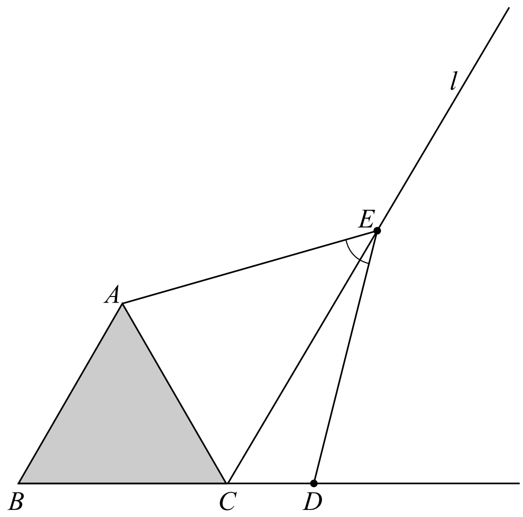
We nemen weer meneer Jansen, met een lengte van 170,0 cm bij het opstaan, als voorbeeld. Met behulp van beide formules kun je op elk tijdstip t (met $0 \leq t \leq 16$) de lengte van meneer Jansen in de loop van de dag uitrekenen. Ook kun je op elk tijdstip t het verschil tussen de uitkomsten van beide formules bekijken.

4p **5** Bereken het maximale verschil voor de lengte van meneer Jansen dat de twee formules kunnen opleveren.

Gelijkzijdige driehoeken

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC.
l is de lijn door C, evenwijdig aan AB. Punt E ligt op l aan dezelfde kant van BC als A.
Punt D ligt zó op de lijn BC dat $\angle AED = 60°$.
Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Vierhoek $ACDE$ is een koordenvierhoek.

3p **6** Bewijs dit.

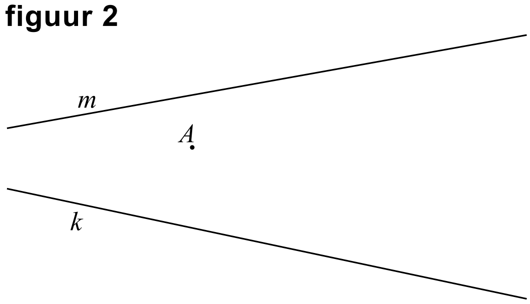
Driehoek ADE is gelijkzijdig.

5p **7** Bewijs dit.

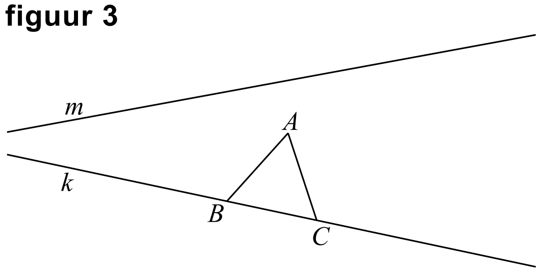
Gegeven zijn de lijnen k en m en een punt A. Zie figuur 2.
In de volgende vraag zoeken we een gelijkzijdige driehoek waarvan A één van de hoekpunten is, waarvan een ander hoekpunt op k ligt en waarvan het derde hoekpunt op m ligt.
Daartoe tekenen we eerst de gelijkzijdige driehoek ABC waarbij B en C beide op k liggen. Zie figuur 3.

4p **8** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage een gelijkzijdige driehoek AKM, waarbij K op k ligt en M op m. Licht je werkwijze toe.

figuur 2



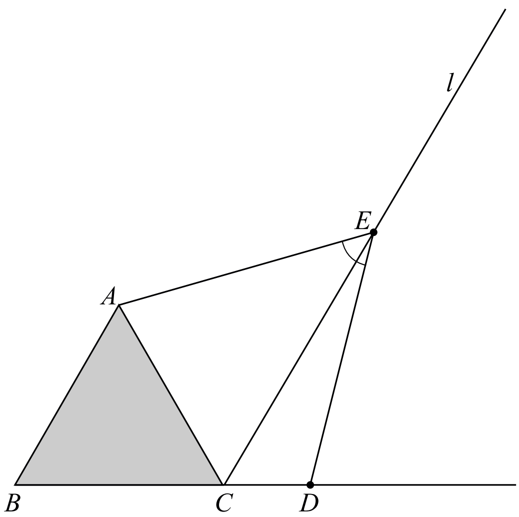
figuur 3



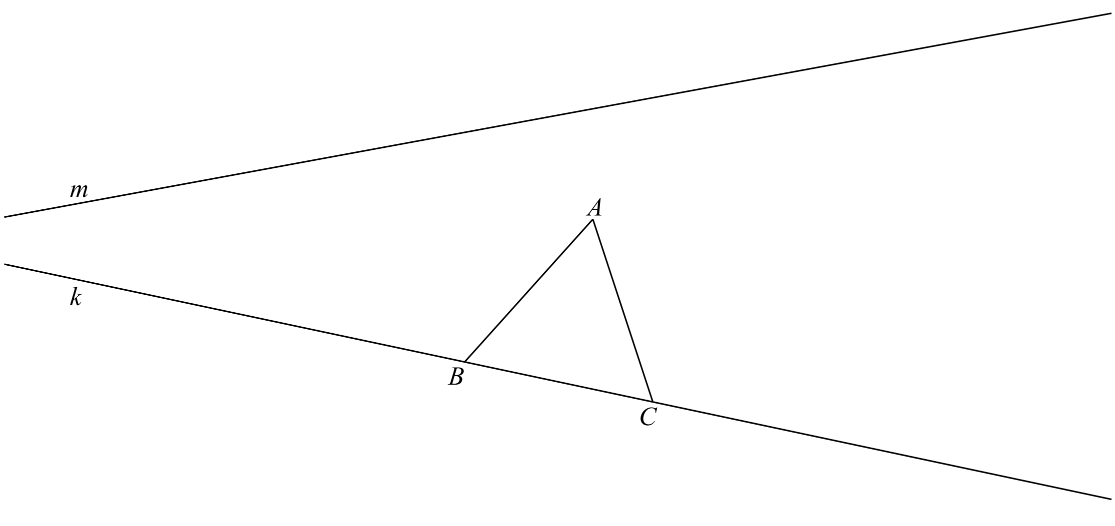
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

6,7



8

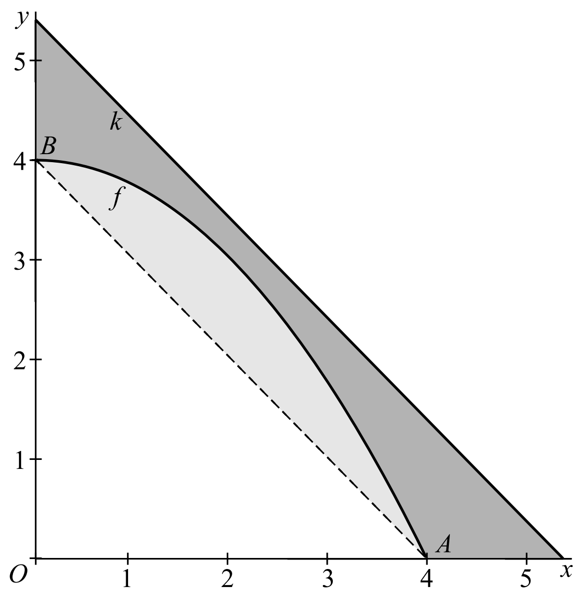


Evenwijdige lijnen

De functie f is gegeven door $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$.

De grafiek van f snijdt de x-as in punt $A(4, 0)$ en de y-as in punt $B(0, 4)$.
Voor elke waarde van c is de lijn k met vergelijking $y = -x + c$ evenwijdig aan de lijn AB. Voor $c > 5$ sluiten de x-as, de lijn k, de y-as en de lijn AB een trapezium in dat door de grafiek van f in twee delen wordt verdeeld. Zie figuur 1.

figuur 1



8p **9** Bereken algebraïsch voor welke exacte waarde van c deze twee delen gelijke oppervlakte hebben.

Een leugendetector

Een leugendetector meet allerlei aspecten van het lichaam (ademhaling, hartslag, bloeddruk, zweten) tijdens een verhoor. Het idee achter het gebruik van een leugendetector is dat iemands lichaam zich anders gedraagt wanneer hij of zij liegt dan wanneer hij of zij de waarheid spreekt.
Men heeft onderzocht in hoeverre een leugendetector betrouwbaar is. De uitkomsten zijn als volgt:

- als iemand liegt, wordt hij door de leugendetector in 88% van de gevallen ook als leugenaar aangewezen (en in 12% van de gevallen wordt hij niet als leugenaar aangewezen);
- als iemand de waarheid spreekt, wordt hij door de leugendetector in 25% van de gevallen toch als leugenaar aangewezen (en in 75% van de gevallen wordt hij niet als leugenaar aangewezen).

Vijf mensen worden onderworpen aan een verhoor. Het is zeker dat één van hen liegt en dat de andere vier personen de waarheid spreken. Bij het verhoor wordt gebruikgemaakt van de leugendetector.

3p **10** Bereken de verwachtingswaarde van het aantal personen dat bij dit verhoor door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen.

Er zijn twee manieren waarop de leugendetector één van de vijf mensen die worden verhoord kan aanwijzen als leugenaar:

- de leugenaar wordt aangewezen als leugenaar en de waarheidsprekers niet;
- één van de waarheidsprekers wordt aangewezen als leugenaar en de andere vier personen niet.

5p **11** Bereken de kans dat één van deze vijf mensen door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen.

De kans dat iemand die de waarheid spreekt toch door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen, is 25%. Daaruit volgt bijvoorbeeld dat de kans dat hij van tien mensen die de waarheid spreken er minstens één aanwijst als leugenaar ongeveer 94% is. Dat is onacceptabel hoog. De leugendetector moet worden verbeterd zo dat de kans dat hij van tien mensen die de waarheid spreken er minstens één als leugenaar aanwijst, hoogstens 50% is.

5p **12** Bereken hoe groot de kans dat de leugendetector iemand die de waarheid spreekt als leugenaar aanwijst maximaal mag zijn.

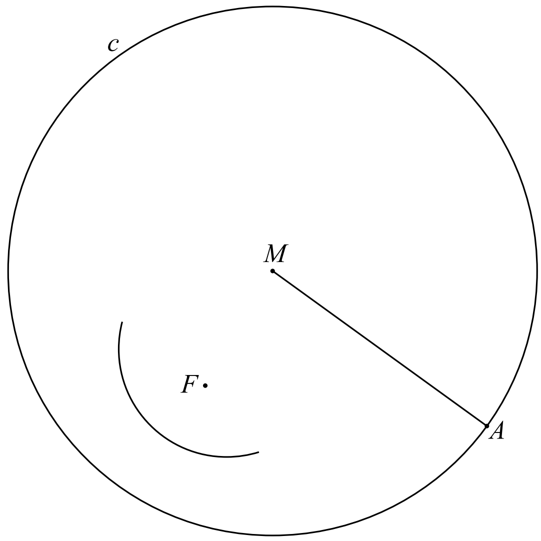
Ellips in een cirkel

Gegeven is een cirkel c met middelpunt M en een punt F binnen deze cirkel.
De ellips e is de meetkundige plaats van de punten die gelijke afstanden tot cirkel c en punt F hebben.

In figuur 1 is een gedeelte van e getekend en een straal MA van de cirkel. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

3p **13** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het snijpunt van ellips e en de straal MA. Licht je werkwijze toe.

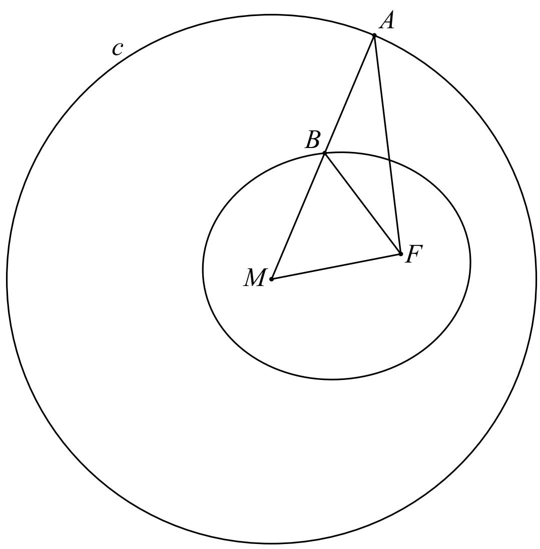
figuur 1



In figuur 2 is een soortgelijke situatie getekend, met F en A op een andere plaats. De straal MA snijdt de ellips in punt B. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

4p **14** Bewijs dat $\angle MBF = 2 \cdot \angle MAF$.
Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

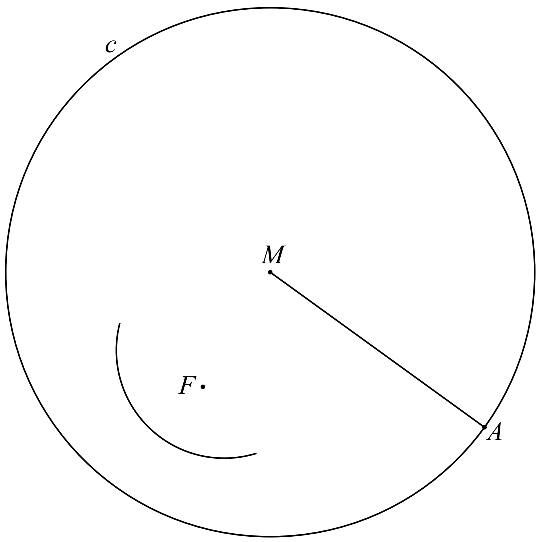
figuur 2



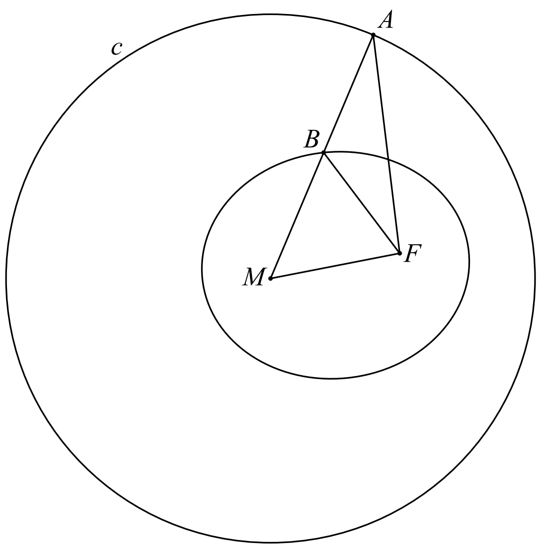
.

uitwerkbijlage

13



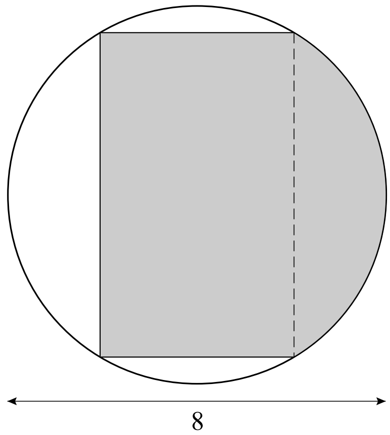
14



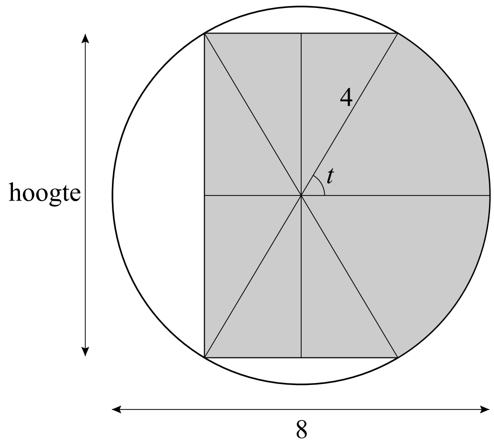
Bebuikte rechthoeken

Binnen een cirkel met straal 4 bekijken we gebieden die bestaan uit een rechthoek (met de hoekpunten op de cirkel), aan de rechter kant aangevuld met een cirkelsegment. Zo'n gebied heeft dan de vorm van een rechthoek met een buik. Zie figuur 1.

figuur 1



figuur 2



In figuur 2 is het gebied verdeeld in twee cirkelsectoren, beide met middelpuntshoek t radialen, en zes gelijke rechthoekige driehoeken. Deze driehoeken hebben ook een hoek met grootte t radialen.
De oppervlakte O van het gebied is een functie van t, met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.
Er geldt: $O(t) = 16t + 24 \cdot \sin 2t$.

6p **15** Toon de juistheid van deze formule aan.

4p **16** Bereken de exacte waarde van O als de hoogte van het gebied 4 is.

Bij een bepaalde hoogte is de oppervlakte O maximaal.
7p **17** Bereken de exacte waarde van deze hoogte.