Vraag	Antwoord	Scores

Een rij

1 maximumscore 4

- Voor de limiet geldt: $u = \dfrac{1}{2-u}$ — 1
- $2u - u^2 = 1$ — 1
- Dit schrijven als $u^2 - 2u + 1 = 0$ — 1
- De (enige) oplossing: $u = 1$ — 1

2 maximumscore 5

- n vervangen door $n-1$ in $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ geeft $u_{n-1} = \dfrac{n}{n+1}$ — 1
- Dit en $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ invullen in $u_n = \dfrac{1}{2-u_{n-1}}$ geeft $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}}$ — 1
- Dit schrijven als $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n+1}{2(n+1)-n}$ — 2
- Dit herleiden tot $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}$ (en dus voldoet $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ voor elke $n \geq 1$ aan de gegeven recursievergelijking) — 1

of

- n vervangen door $n-1$ in $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ geeft $u_{n-1} = \dfrac{n}{n+1}$ — 1
- Dit invullen in $u_n = \dfrac{1}{2-u_{n-1}}$ geeft $u_n = \dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}}$ — 1
- Dit schrijven als $u_n = \dfrac{n+1}{2(n+1)-n}$ — 2
- Dit herleiden tot $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ (en dus voldoet $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ voor elke $n \geq 1$ aan de gegeven recursievergelijking) — 1

Onnodig ingewikkeld?

3 **maximumscore 4**

- Uitgerekend moet worden het tijdstip t waarbij $S = \frac{168{,}0}{170{,}0}$ $(\approx 0{,}9882)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{168{,}0}{170{,}0} = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$ opgelost kan worden 1
- De oplossing van de vergelijking: $t \approx 14{,}73$ uur 1
- Het antwoord: na (ongeveer) 884 minuten (ofwel 14 uur en 44 min.) 1

4 **maximumscore 6**

- $S' = \dfrac{-0{,}00216}{-0{,}00216t + 2{,}7183}$ $\left(= \dfrac{0{,}00216}{0{,}00216t - 2{,}7183}\right)$ 2
- $S'' = -\dfrac{0{,}00216^2}{(0{,}00216t - 2{,}7183)^2}$ 2
- (omdat $0{,}00216^2$ en $(0{,}00216t - 2{,}7183)^2$ beide voor elke waarde van t positief zijn, geldt:) S'' is voor elke waarde van t negatief 1
- Dus er is sprake van toenemende daling 1

5 **maximumscore 4**

- Voor het (positieve) verschil V dat de formules kunnen opleveren geldt: $V = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183) - (-0{,}0008t + 1{,}0000)$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van V gevonden kan worden 1
- Dit maximum is $2{,}9551 \cdot 10^{-5}$ 1
- Het maximale verschil voor de lengte van meneer Jansen is dus $170{,}0 \cdot 2{,}9551 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}0050$ cm (of 0,005 cm) 1

Gelijkzijdige driehoeken

6 maximumscore 3

- $\angle ACB = 60°$, dus $\angle ACD = 180° - 60° = 120°$; *(gelijkbenige driehoek, hoekensom driehoek), gestrekte hoek* 1
- $\angle ACD + \angle AED = 120° + 60° = 180°$ 1
- Dus is *ACDE* een koordenvierhoek; *omgekeerde koordenvierhoekstelling* 1

7 maximumscore 5

- *ACDE* is een koordenvierhoek, dus *ACDE* heeft een omgeschreven cirkel 1
- $\angle DAE = \angle DCE$; *constante hoek* 1
- $\angle DCE = \angle DBA = 60°$; *F-hoeken, (gelijkbenige driehoek, hoekensom driehoek)* 1
- Hieruit volgt $\angle DAE = 60°$ 1
- $\angle AED = \angle DAE = 60°$ geeft $\angle ADE = 60°$, dus driehoek *EAD* is gelijkzijdig; *hoekensom driehoek, (gelijkbenige driehoek)* 1

of

- *ACDE* is een koordenvierhoek, dus *ACDE* heeft een omgeschreven cirkel 1
- $\angle ADE = \angle ACE$; *constante hoek* 1
- $\angle ACE = \angle BAC = 60°$; *Z-hoeken, (gelijkbenige driehoek, hoekensom driehoek)* 1
- Hieruit volgt $\angle ADE = 60°$ 1
- $\angle AED = \angle ADE = 60°$ geeft $\angle DAE = 60°$, dus driehoek *EAD* is gelijkzijdig; *hoekensom driehoek, (gelijkbenige driehoek)* 1

8 maximumscore 4

- Het tekenen van de lijn door *C* evenwijdig aan *AB* 1
- Het tekenen van *M*, het snijpunt van deze lijn met *m* 1
- De tekening van driehoek *AKM* 1
- Een toelichting, waarbij verwezen wordt naar de stam van vraag 6 en 7 1

of

- Het tekenen van de lijn door *B* evenwijdig aan *AC* 1
- Het tekenen van *M*, het snijpunt van deze lijn met *m* 1
- De tekening van driehoek *AKM* 1
- Een toelichting, waarbij verwezen wordt naar de stam van vraag 6 en 7 1

Evenwijdige lijnen

9 maximumscore 8

- De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as is $\int_0^4 (4-\frac{1}{4}x^2)\,\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $4-\frac{1}{4}x^2$ is $4x-\frac{1}{12}x^3$ — 1
- $\left[4x-\frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = 10\frac{2}{3}$ — 1
- De oppervlakte van het bovenste vlakdeel is $\frac{1}{2}c^2 - 10\frac{2}{3}$ — 1
- De oppervlakte van het onderste vlakdeel is $10\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 2\frac{2}{3}$ — 1
- Beide oppervlakten zijn gelijk als $\frac{1}{2}c^2 - 10\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$, dus als $\frac{1}{2}c^2 = 13\frac{1}{3}$ ofwel $c^2 = 26\frac{2}{3} = \frac{80}{3}$ — 2
- $c = \sqrt{\frac{80}{3}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

Een leugendetector

10 maximumscore 3

- De verwachtingswaarde is $1\cdot 0,88 + 4\cdot 0,25$ — 2
- Het antwoord: 1,88 — 1

11 maximumscore 5

- De kans dat de leugenaar als leugenaar wordt aangewezen en de waarheidsprekers niet is $0,88\cdot 0,75^4 \approx 0,2784$ — 2
- De kans dat de leugenaar niet als leugenaar wordt aangewezen en één van de waarheidsprekers wel is $0,12\cdot 4\cdot 0,25\cdot 0,75^3 \approx 0,0506$ — 2
- Het antwoord: ongeveer 0,33 (of ongeveer 33%) — 1

12 maximumscore 5

- Het aantal waarheidsprekers die als leugenaar worden aangewezen, X, is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en p is de kans dat een waarheidspreker als leugenaar wordt aangewezen — 1
- Gevraagd wordt de grootste waarde van x zo dat $\mathrm{P}(X \geq 1 \mid n = 10, p = x) \leq 0,50$ — 1
- Beschrijven hoe $\mathrm{P}(X \geq 1 \mid n = 10, p = x) = 0,50$ opgelost kan worden — 1
- De oplossing van deze vergelijking is $x \approx 0,06697$ — 1
- De grootste waarde van x die aan de ongelijkheid voldoet, is ongeveer 0,066 (of 0,06) — 1

of

- Als p de kans is dat een waarheidspreker als leugenaar wordt aangewezen, dan is de kans dat geen van de waarheidsprekers aangewezen wordt als leugenaar $(1-p)^{10}$ — 1
- Gevraagd wordt de grootste waarde van p zo dat $1-(1-p)^{10} \leq 0,50$ — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $1-(1-p)^{10} = 0,50$ opgelost kan worden — 1
- De oplossing van deze vergelijking is $p \approx 0,06697$ — 1
- De grootste waarde van p die aan de ongelijkheid voldoet, is ongeveer 0,066 (of 0,06) — 1

Ellips in een cirkel

13 maximumscore 3

- Het tekenen van de middelloodlijn van FA en het snijpunt van deze lijn met MA — 2
- Toelichting: het gevraagde punt ligt op MA en heeft gelijke afstanden tot F en de cirkel, dus ligt op de middelloodlijn van FA — 1

14 maximumscore 4

- $BF = BA$, want B ligt op de ellips — 1
- $\angle BFA = \angle BAF$; *gelijkbenige driehoek* — 1
- $\angle FBA = 180° - 2 \cdot \angle BAF$; *hoekensom driehoek* — 1
- $\angle MBF = 180° - \angle FBA$, dus $\angle MBF = 2 \cdot \angle BAF = 2 \cdot \angle MAF$; *gestrekte hoek* — 1

Bebuikte rechthoeken

Vraag	Antwoord	Scores
15	**maximumscore 6**	
	• De oppervlakte van elke cirkelsector is $\frac{t}{2\pi}\cdot\pi\cdot 4^2 = 8t$	2
	• Elke driehoek heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\cdot 4\cos t\cdot 4\sin t$	2
	• $O(t) = 2\cdot 8t + 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cos t\cdot 4\sin t = 16t + 48\cdot\sin t\cdot\cos t$	1
	• Dus $O(t) = 16t + 24\cdot 2\sin t\cos t = 16t + 24\cdot\sin 2t$	1
16	**maximumscore 4**	
	• De hoogte is 4, dus $\sin t = \frac{2}{4}$	1
	• Dit geeft $t = \frac{1}{6}\pi$	1
	• De oppervlakte is dan $2\frac{2}{3}\pi + 12\sqrt{3}$	2
17	**maximumscore 7**	
	• $O'(t) = 16 + 48\cdot\cos 2t$	2
	• O is maximaal als $\cos 2t = -\frac{1}{3}$	1
	• Dit geeft $1 - 2\sin^2 t = -\frac{1}{3}$ en dus $\sin^2 t = \frac{2}{3}$	2
	• Hieruit volgt (omdat $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) $\sin t = \sqrt{\frac{2}{3}}$	1
	• De hoogte is $8\cdot\sin t = 8\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$ $(= \frac{8}{3}\sqrt{6})$	1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 26 juni naar Cito.