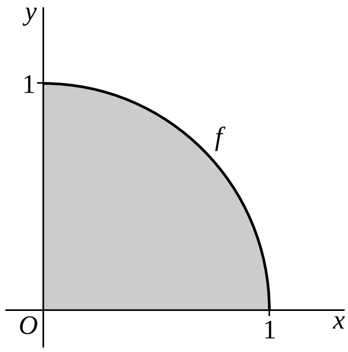
Een zwaartepunt

Van een cirkelschijf met middelpunt (0, 0) en straal 1 is het kwart getekend dat in het eerste kwadrant ligt. De cirkelboog is de grafiek van de functie f die gegeven is door $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ op het domein [0, 1]. Zie figuur 1.

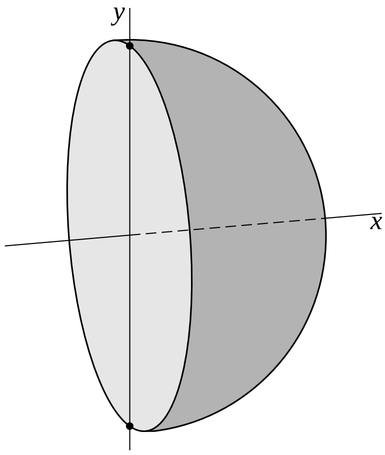
We wentelen het kwart van de cirkelschijf om de x-as. Het omwentelingslichaam dat dan ontstaat is een halve bol. Zie figuur 2.

Het zwaartepunt van de halve bol ligt op de positieve x-as.

figuur 1



figuur 2



Voor de x-coördinaat x_Z van dit zwaartepunt geldt:

$x_Z = \dfrac{M}{V}$, met

$M = \pi \cdot \int_0^1 x \cdot (f(x))^2 \mathrm{d}x$ en

V is de inhoud van de halve bol.

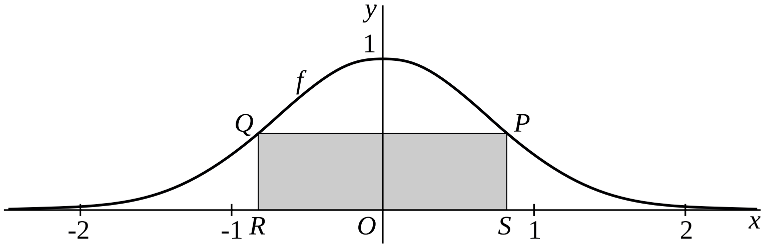
De inhoud van een bol met straal r is gelijk aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.

6p **1** Bereken x_Z exact.

Onder een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
Het punt $P(p,\ \mathrm{e}^{-p^2})$ ligt op de grafiek van f, waarbij $p > 0$.
Onder de grafiek van f ligt een rechthoek $PQRS$ met P en Q op de grafiek en R en S op de x-as. Dus S is het punt $(p,\ 0)$. Zie figuur 3.

figuur 3



Punt P kan zo op de grafiek van f gekozen worden dat $PQ = PS$. $PQRS$ is dan een vierkant.

4p **2** Bereken de oppervlakte van dit vierkant.

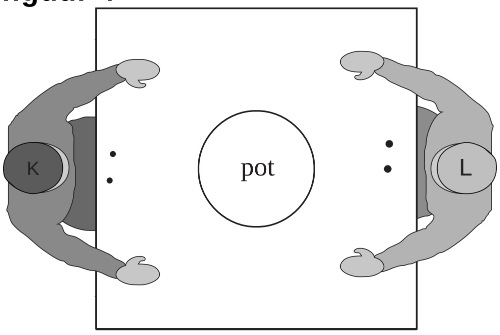
Er is een waarde van p waarvoor de oppervlakte van $PQRS$ maximaal is.

5p **3** Bereken deze waarde van p exact.

Een dobbelspel

De personen K en L spelen een dobbelspel. Elk van de spelers begint met twee fiches; de pot is dan nog leeg. Zie figuur 4.
Bij het spel wordt geworpen met *speciale* dobbelstenen: op vier kanten van zo'n dobbelsteen staat een stip (•), op één kant een A en op één kant een P. Zie foto.

figuur 4



foto

De spelregels zijn:
- De spelers werpen om de beurt met één of twee dobbelstenen.
- De speler die aan de beurt is, werpt met één dobbelsteen als hij één fiche heeft en met twee dobbelstenen als hij twee of meer fiches heeft.
- Voor elke A die een speler werpt, moet hij 1 fiche aan de andere speler geven.
- Voor elke P die een speler werpt, moet hij 1 fiche in de pot doen.
- Voor een stip (•) hoeft hij geen fiche af te geven.
- Wanneer een speler geen fiches meer heeft, heeft hij verloren (en de andere speler gewonnen).

Hiernaast staat een mogelijk spelverloop waarbij speler K is begonnen. In zijn tweede beurt werpt speler K met één dobbelsteen want hij heeft nog maar één fiche.

een spelverloop

aantal fiches van:

	K	L	pot
	2	2	0
K werpt $\boxed{A}\boxed{\bullet}$			
	1	3	0
L werpt $\boxed{P}\boxed{P}$			
	1	1	2
K werpt $\boxed{P}$			
	0	1	3

L heeft gewonnen

Neem aan dat speler K begint.

De kans dat speler K na zijn eerste beurt nog 1 fiche heeft en L dan 3 fiches heeft, is $\frac{2}{9}$.

3p **4** Toon dit aan.

Op een gegeven moment heeft K 2 fiches, L 1 fiche en de pot 1 fiche. Op dit moment is L aan de beurt.

4p **5** Bereken de kans dat, na deze beurt van L, K nog één beurt krijgt en het spel daarna afgelopen is.

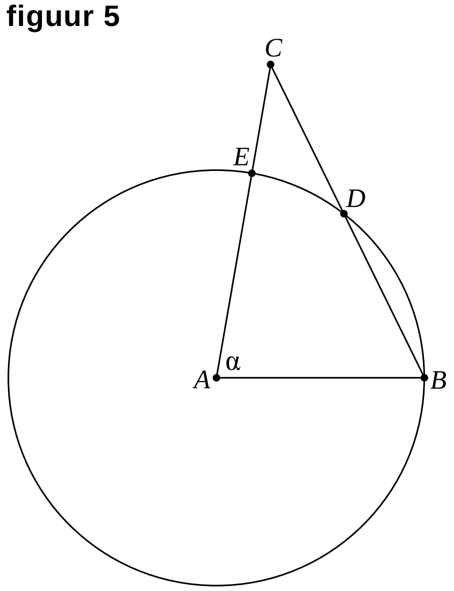
Een toeschouwer heeft het spel met de computer heel vaak gesimuleerd. Op grond van het resultaat beweert hij dat de speler die begint, 43% kans heeft om het spel te winnen en de andere speler 57%.
De spelers K en L spelen het spel tien keer, waarbij speler K steeds begint.
Veronderstel dat de toeschouwer gelijk heeft.

6p **6** Bereken de kans dat een van beide spelers minstens zeven keer wint.

Driehoek en cirkel

In figuur 5 is een scherphoekige driehoek ABC getekend, met $AC > AB$, en de cirkel met middelpunt A en straal AB.
Deze cirkel snijdt BC in D en AC in E.
De grootte van $\angle BAC$ noemen we α.
Figuur 5 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

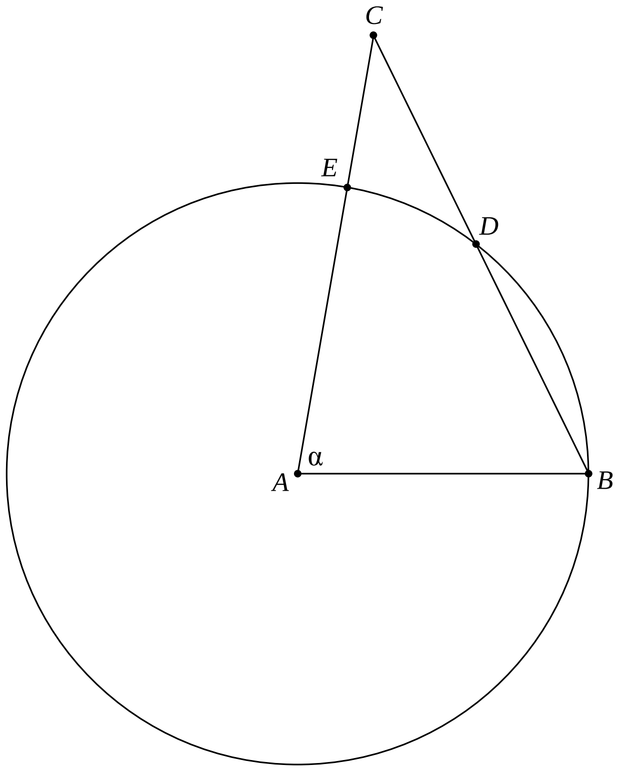
figuur 5



5p **7** Druk $\angle CDE$ uit in α. Bewijs dat je antwoord juist is.

uitwerkbijlage

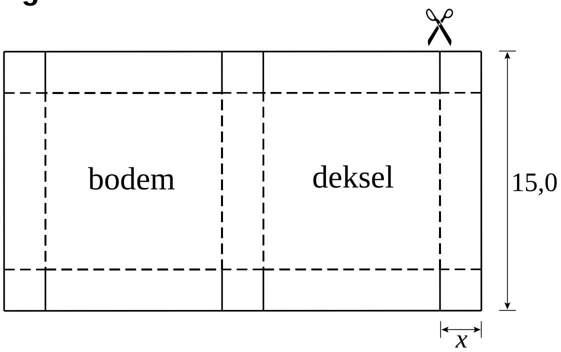
7



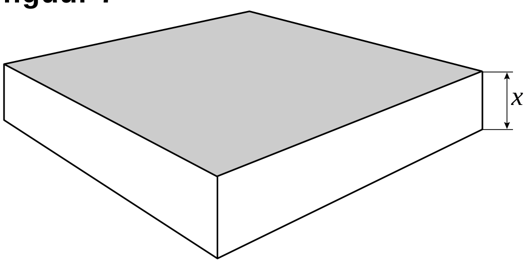
Dozen met vaste inhoud

Uit een lange strook karton met een breedte van 15,0 dm worden dozen gemaakt met vierkante bodem en deksel en rechthoekige zijkanten. Daartoe wordt het karton verknipt in rechthoeken waarvan de breedte gelijk is aan 15,0 dm en de lengte afhangt van de gewenste hoogte van de doos. We noemen de hoogte van de doos in dm x.
Zo'n rechthoekig stuk karton wordt op acht plaatsen x dm ingeknipt, waarna zes vierkantjes van x bij x dm worden omgevouwen. Zie figuur 6. De stippellijnen zijn vouwlijnen. Tot slot wordt het karton gevouwen tot een doos. Zie figuur 7.

figuur 6



figuur 7

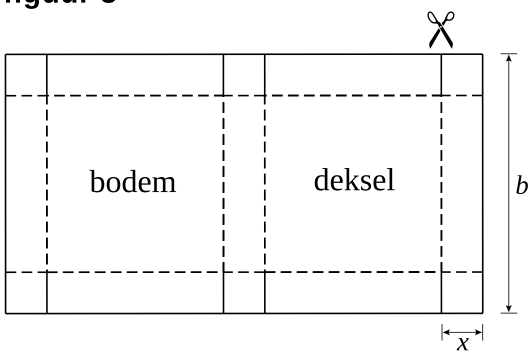


De inhoud van de doos moet 100 dm^3 zijn.

6p **8** Bereken bij welke lengtes van de kartonnen rechthoek dit het geval is. Geef je antwoord in dm, afgerond op 1 decimaal.

Er zijn ook stroken karton te verkrijgen met een andere breedte dan 15,0 dm. De breedte van het stuk karton in dm noemen we b. Zie figuur 8.

figuur 8



We kijken in het vervolg van deze opgave steeds naar dozen waarvoor geldt:
- de bodem en het deksel zijn vierkant,
- de vier zijvlakken zijn rechthoekig,
- de inhoud is 100 dm^3.

Er geldt: $(b-2x)^2 = \dfrac{100}{x}$.

3p **9** Toon aan dat deze formule juist is.

Uit deze formule volgt dat $b = 2x + \dfrac{10}{\sqrt{x}}$.

De oppervlakte A van de kartonnen rechthoek waaruit de doos gemaakt wordt, is afhankelijk van x.

Er geldt: $A = 6x^2 + 70\sqrt{x} + \dfrac{200}{x}$.

5p **10** Toon aan dat deze formule juist is.

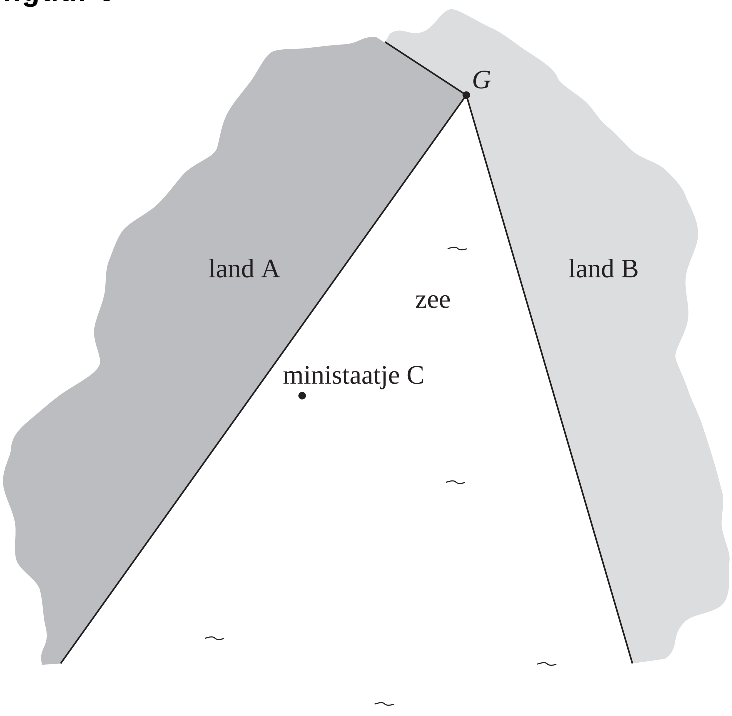
Er zijn twee dozen (doos 1 en doos 2) die aan de specificaties voldoen en waarvoor geldt:
- doos 2 is vier keer zo hoog als doos 1 (dus voor de hoogtes x_1 en x_2 van doos 1 en doos 2 geldt $x_2 = 4 \cdot x_1$) en
- voor doos 1 en doos 2 is evenveel karton nodig (dus voor de benodigde oppervlaktes A_1 en A_2 van de kartonnen rechthoeken waaruit doos 1 en doos 2 gemaakt worden, geldt $A_2 = A_1$).

4p **11** Bereken x_1. Geef je antwoord in dm, afgerond op 2 decimalen.

Zee verdelen

Een zee wordt begrensd door twee rechte kustlijnen: aan de ene kustlijn ligt land A, aan de andere land B. G is het gemeenschappelijke punt van de kustlijnen. In de zee ligt een ministaatje C dat we benaderen door een punt. Zie figuur 9.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 9

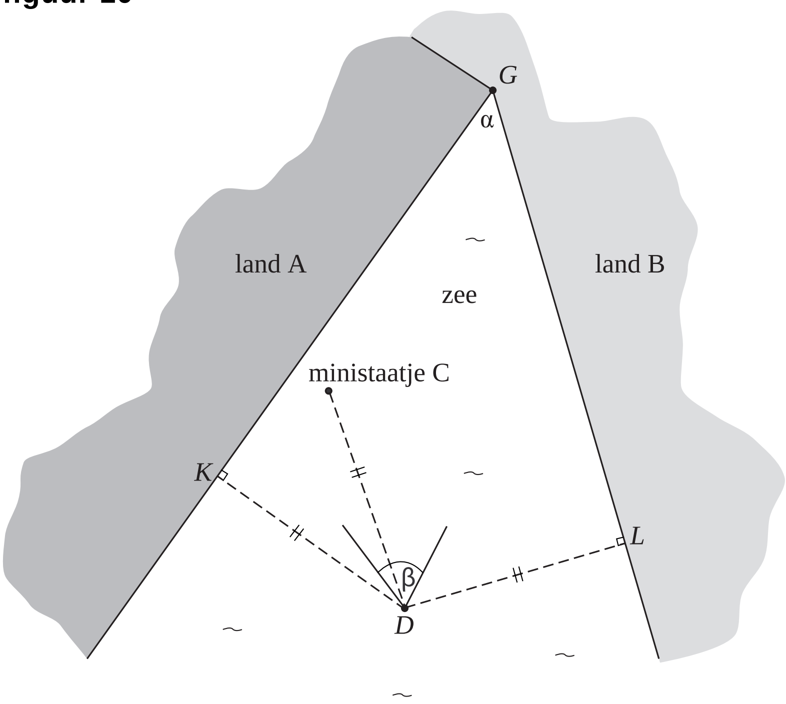


De zee wordt verdeeld tussen A, B en C volgens het naaste-buurprincipe.

6p **12** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grenzen bij deze verdeling. Licht je tekening toe.

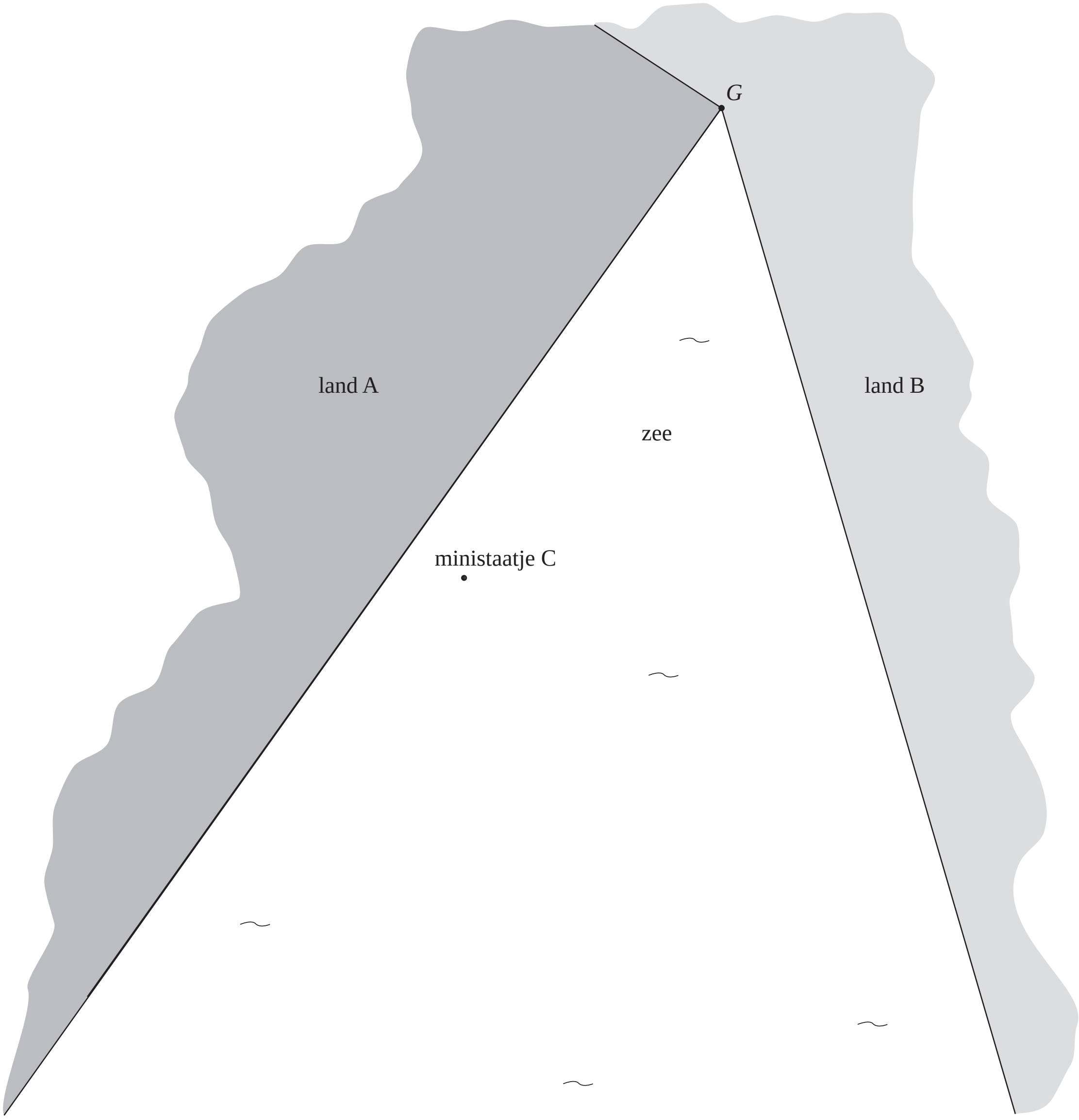
In figuur 10 is een drielandenpunt D getekend. Er geldt dus: $DK = DL = DC$.
In figuur 10 zijn de raaklijnen aan twee aanliggende stukjes grenslijn in D getekend. De grootte van de hoek tussen de twee raaklijnen noemen we β. De grootte van de hoek die de rechte kustlijnen met elkaar maken in G noemen we α. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 10



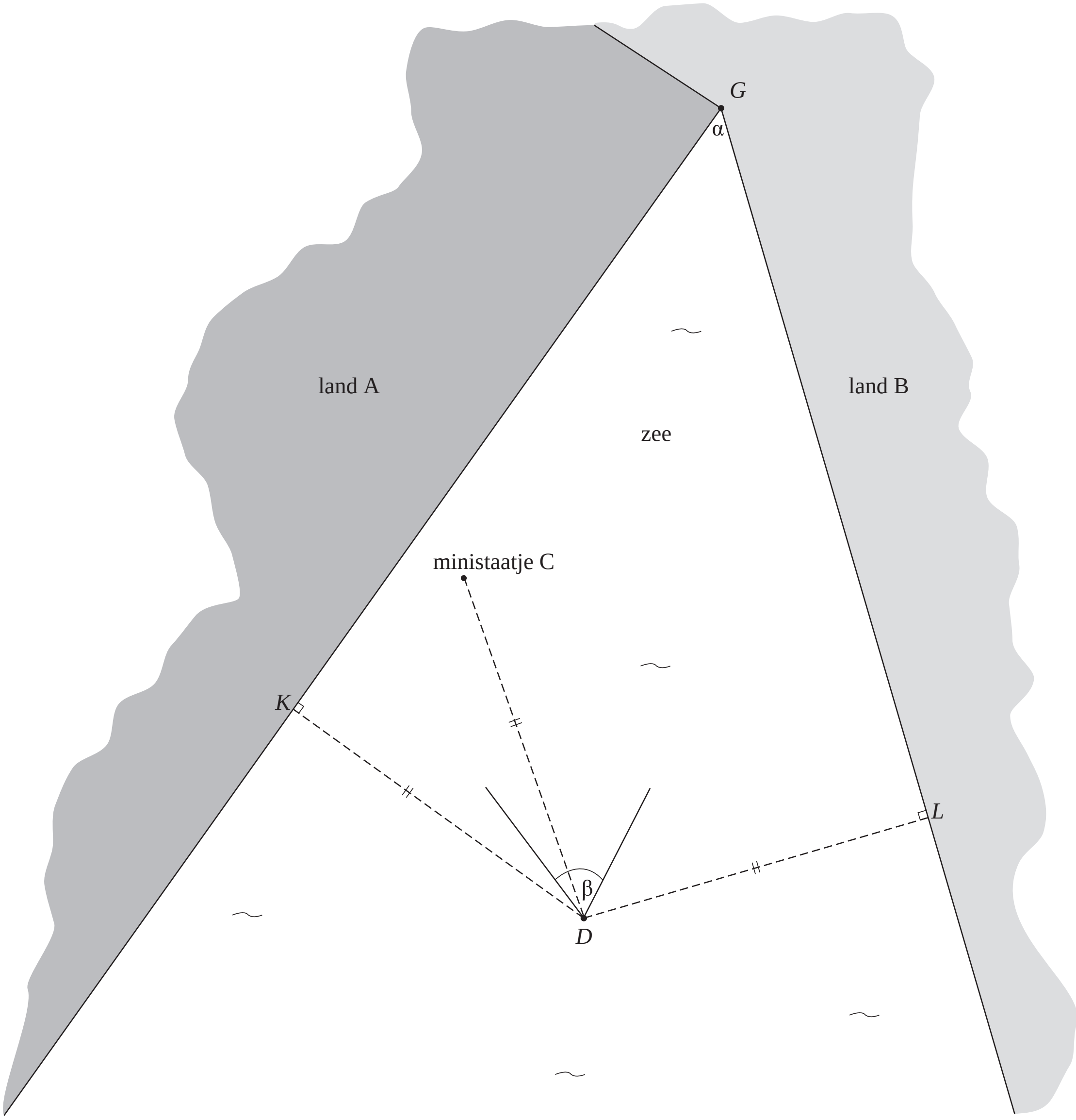
4p **13** Toon aan dat $\beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$.

12



uitwerkbijlage

13

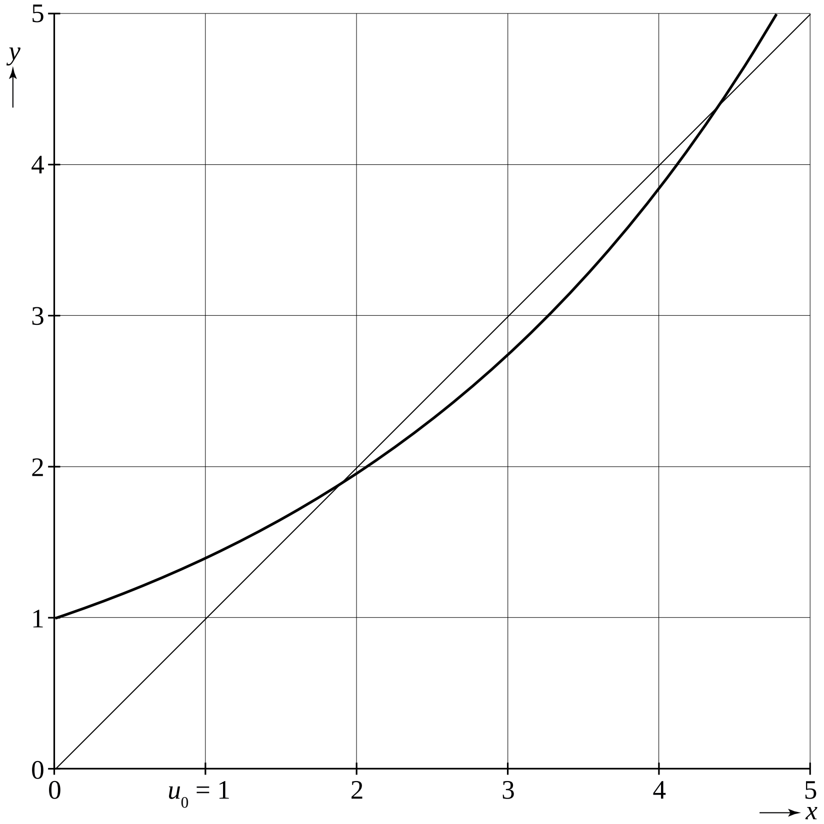


Exponentiële rijen

Een rij u_0, u_1, u_2, … is gegeven door $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = a^{u_n} \end{cases}$ met $a > 1$.

In figuur 11 zijn voor een zekere waarde van a in een rechthoekig assenstelsel Oxy de grafiek van $y = a^x$ en de lijn $y = x$ getekend. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

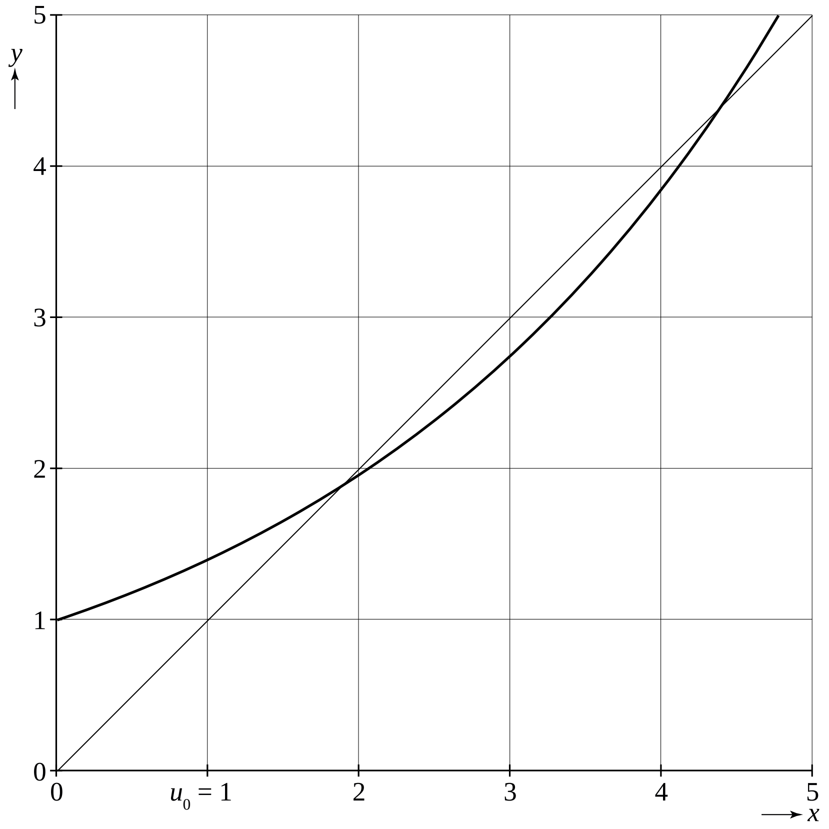
figuur 11



3p **14** Teken met behulp van een webgrafiek in de figuur op de uitwerkbijlage de plaats van u_1 en u_2 op de x-as.

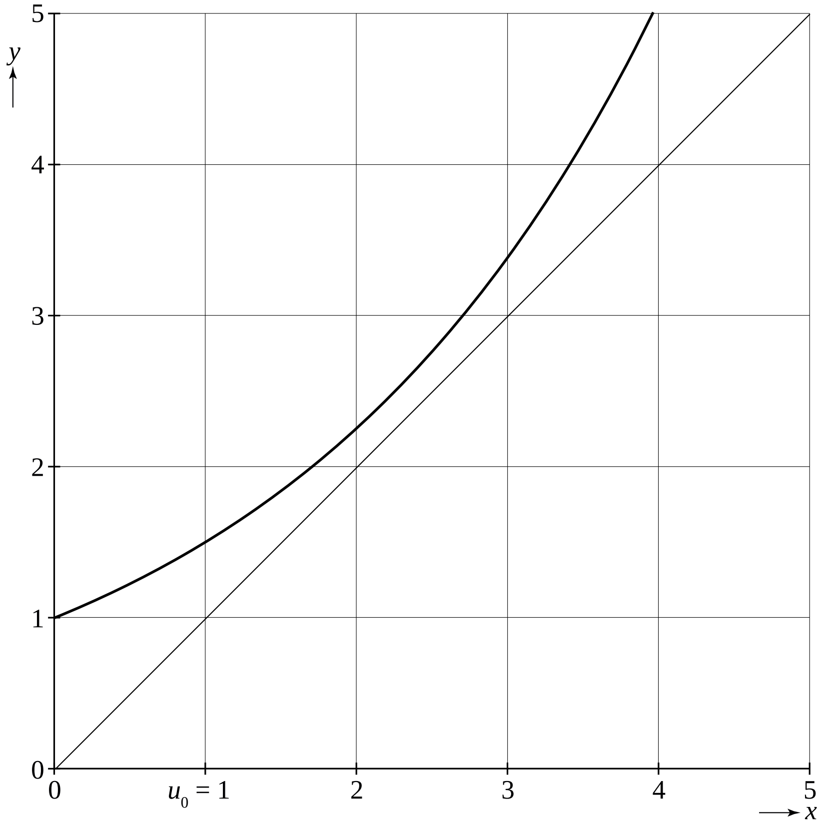
uitwerkbijlage

14



In de situatie van figuur 11 convergeert de rij u_0, u_1, u_2, ….
In figuur 12 zijn voor een andere waarde van a de grafiek van $y = a^x$ en de lijn $y = x$ getekend. In deze situatie convergeert de rij u_0, u_1, u_2, … niet.

figuur 12

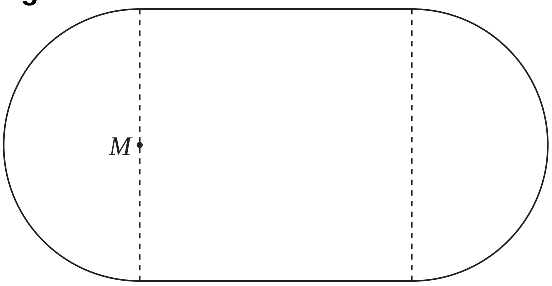


6p **15** Bereken exact de grootste waarde van a waarvoor de rij u_0, u_1, u_2, … convergeert.

Rechthoek in ovaal

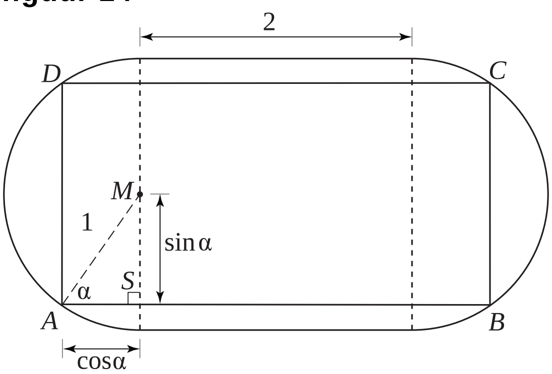
Het ovaal in figuur 13 bestaat uit een vierkant van 2 bij 2 met aan weerszijden een halve cirkel met straal 1. M is het middelpunt van een van de halve cirkels.

figuur 13



In het ovaal wordt een rechthoek $ABCD$ getekend met de hoekpunten op de halve cirkels en met de zijden evenwijdig aan de zijden van het vierkant. $\angle MAB = \alpha$ rad ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$). Zie figuur 14. Hierin is de rechthoekige driehoek AMS te zien met rechthoekszijden $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$.

figuur 14



De oppervlakte O van rechthoek $ABCD$ kan uitgedrukt worden in α. Er geldt: $O = 2\sin 2\alpha + 4\sin\alpha$.

4p **16** Toon aan dat deze formule juist is.

Er geldt: $\dfrac{dO}{d\alpha} = 8 \cdot \cos 1\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha$.

4p **17** Toon aan dat de formule voor $\dfrac{dO}{d\alpha}$ juist is.

Er is een waarde van α, met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, waarvoor de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ maximaal is.

4p **18** Bereken langs algebraïsche weg de maximale oppervlakte van rechthoek $ABCD$.