Bier tappen

Bij het tappen van bier treden verschillen op in de hoeveelheid bier per glas. Uit onderzoek blijkt dat de hoeveelheid bier die per glas getapt wordt bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 180 ml en een standaardafwijking van $15{,}5$ ml.

Iemand bestelt voor een rondje twaalf glazen tapbier.

5p **1** Bereken de kans dat bij het rondje ten hoogste twee glazen zitten met minder dan 175 ml bier.

Ook de totale hoeveelheid getapt bier van het rondje is bij benadering normaal verdeeld, met standaardafwijking $\sqrt{12} \cdot 15{,}5$ ml.

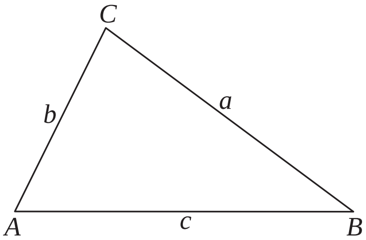
4p **2** Bereken de kans dat de totale hoeveelheid getapt bier van het rondje meer dan 90 ml minder is dan je zou mogen verwachten.

.

De formule van Heron

In de eerste eeuw van onze jaartelling schreef de Egyptenaar Heron een werk waarin hij een formule gaf voor de oppervlakte van een driehoek. Hij deed dit als volgt.
Noem de lengtes van de zijden van de driehoek a, b en c. Zie figuur 1.

figuur 1



Noem de halve omtrek van de driehoek s. Dus $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

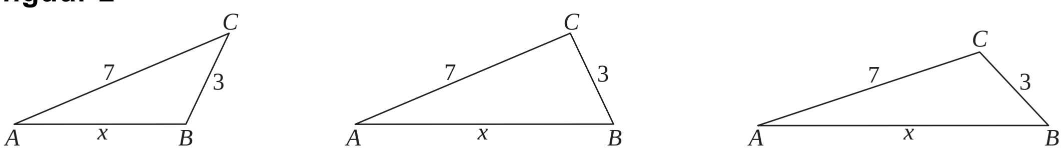
Een formule voor de oppervlakte H van de driehoek is dan:
$H = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Deze formule wordt *de formule van Heron* genoemd.

4p **3** Toon aan dat deze formule de juiste uitkomst geeft voor de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5.

In het vervolg van deze opgave gebruiken we dat de formule van Heron voor elke driehoek geldt.
We bekijken driehoeken ABC met $AC = 7$ en $BC = 3$. De lengte van de derde zijde AB noemen we x, met $4 < x < 10$. In figuur 2 zijn drie van dergelijke driehoeken getekend.

figuur 2



Voor de oppervlakte H van zo'n driehoek ABC geldt:

$H(x) = \sqrt{\left(25 - \frac{1}{4}x^2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - 4\right)}$

5p **4** Toon dit aan met behulp van de formule van Heron.

Er is één waarde van x waarvoor de oppervlakte van driehoek ABC maximaal is. Voor deze waarde van x is $(25 - \frac{1}{4}x^2)(\frac{1}{4}x^2 - 4)$ maximaal.

4p **5** Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van x exact.

.

Bewegende schaduw

Bij een practicumproef draait een doorzichtige cirkelvormige schijf in een verticaal vlak om zijn middelpunt M . Deze schijf heeft een straal van 1 meter. Tussen twee punten op de rand van de schijf wordt een staaf AB met lengte 1 meter bevestigd. De punten op de rand van de schijf hebben een constante snelheid van 1 m/s. Het geheel wordt beschenen door een bundel verticaal invallende evenwijdige lichtstralen. In deze opgave bekijken we de lengte van de schaduw $A'B'$ van de staaf op de grond.

We maken een wiskundig model bij deze proef. We kiezen het assenstelsel in het draaivlak van de schijf, met de x-as langs de grond en de y-as door het middelpunt M van de schijf. De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A = \cos(t - \frac{1}{6}\pi) \\ y_A = 1\frac{1}{5} + \sin(t - \frac{1}{6}\pi) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B = \cos(t + \frac{1}{6}\pi) \\ y_B = 1\frac{1}{5} + \sin(t + \frac{1}{6}\pi) \end{cases}$$

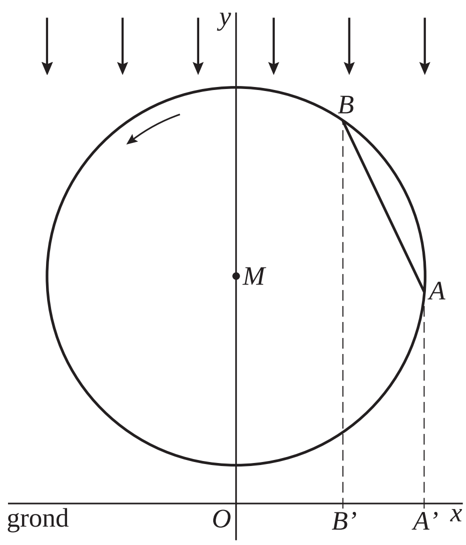
Hierbij zijn x en y in meter en is t in seconde.

In figuur 3 staat een vooraanzicht van de situatie op een zeker tijdstip.

De lengte (in meter) van de schaduw $A'B'$ op tijdstip t noemen we $l(t)$.
Voor elke waarde van t tussen 0 en π geldt: $l(t) = \sin t$.

5p **6** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

figuur 3



Om de gemiddelde schaduwlengte g van AB (in meter) te berekenen, kunnen we ons beperken tot een halve omwenteling: $0 \le t \le \pi$.

g kan berekend worden met een integraal: $g = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} l(t)\,\mathrm{d}t$.

Er geldt: $g = \frac{2}{\pi}$.

4p **7** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

We vergelijken de delen van de omwentelingstijd waarvoor $l(t) > \frac{2}{\pi}$ en waarvoor $l(t) < \frac{2}{\pi}$. We kunnen ons weer beperken tot een halve omwenteling: $0 \le t \le \pi$.

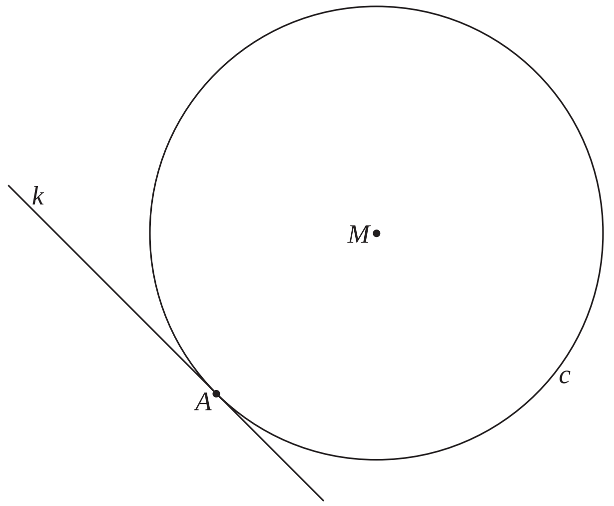
5p **8** Onderzoek of deze delen even groot zijn.

.

Cirkel en lijn

Gegeven is de cirkel c met middelpunt M en straal 3 cm.
De lijn k raakt aan c in het punt A.
Zie figuur 4. Deze figuur staat twee maal op de uitwerkbijlage.

figuur 4



Er zijn vier punten die zowel op afstand 1 cm van k als op afstand 1 cm van c liggen.

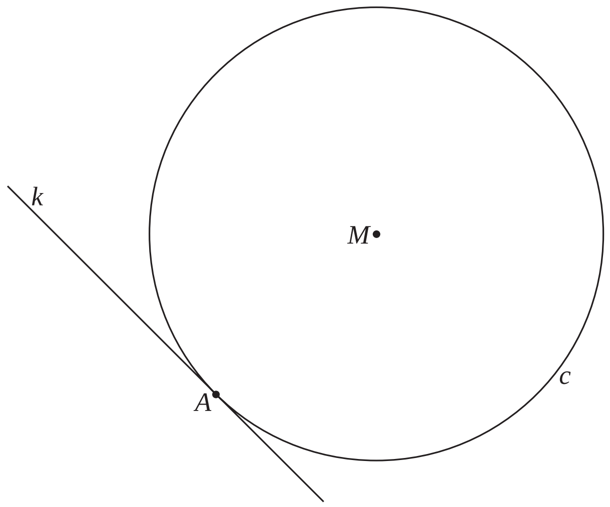
5p **9** Teken deze vier punten in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

5p **10** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de meetkundige plaats van de punten die even ver van k als van c liggen. Licht je werkwijze toe.

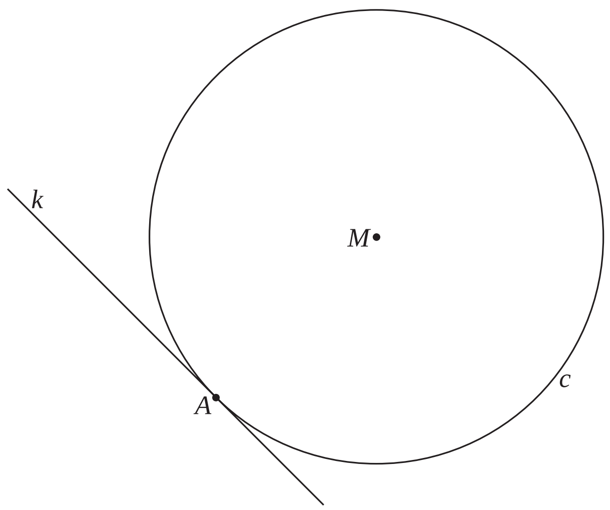
.

uitwerkbijlage

9



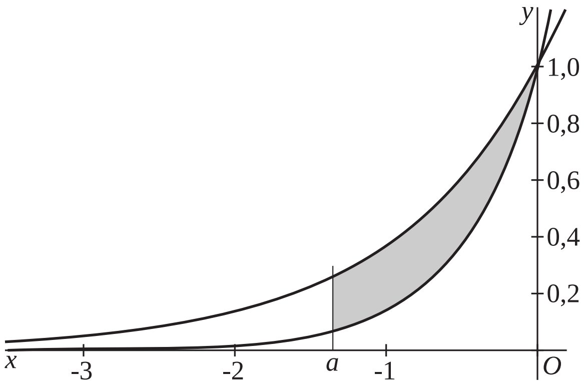
10



Twee exponentiële functies

We bekijken de grafieken van de functies f en g, gegeven door $f(x) = \mathrm{e}^x$ en $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ voor $x \leq 0$. In figuur 5 staan de grafieken van deze functies. De schaal op de y-as is anders gekozen dan de schaal op de x-as.

figuur 5

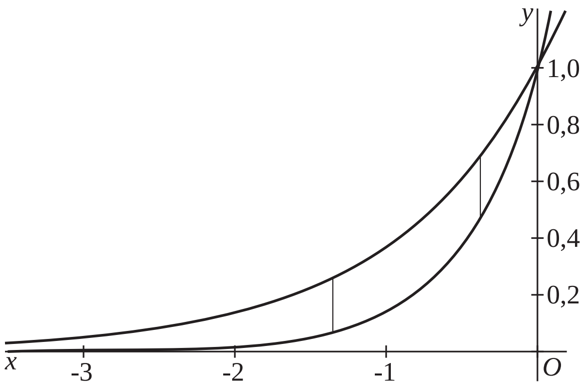


Voor elke $a < 0$ is de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $x = a$ gelijk aan $\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^a)^2$.

5p **11** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

We bekijken de verticale verbindingslijnstukken van de grafieken van f en g voor $x \leq 0$. In figuur 6 zijn twee van deze verbindingslijnstukken als voorbeeld getekend.

figuur 6



5p **12** Bereken exact de grootste lengte van zo'n verbindingslijnstuk.

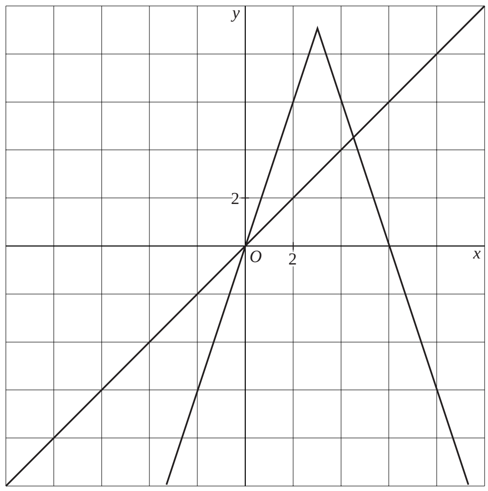
Met verschillende startwaarden

De functie f is gegeven door: $\begin{cases} f(x) = 3x & \text{als } x < 3 \\ f(x) = 18 - 3x & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$

Deze functie kan ook geschreven worden als $f(x) = 9 - |3x - 9|$.

In figuur 7 is de grafiek van f getekend, evenals de lijn $y = x$.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 7



Bij elke startwaarde s is een rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ vastgelegd door:

$$\begin{cases} u_0 = s \\ u_n = f(u_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Neem $s = 5$. Bij deze startwaarde vertonen de termen van de rij vanaf $n = 3$ een bepaalde regelmaat.

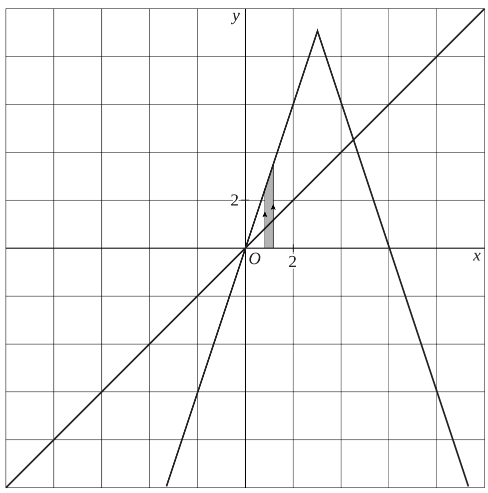
5p **13** Geef voor $n \geq 3$ een directe formule waarin je u_n uitdrukt in n. Licht je antwoord toe.

Er zijn startwaarden waarvoor de rij bestaat uit twee verschillende getallen die elkaar afwisselen. Dus $u_2 = u_0$.

5p **14** Eén van die startwaarden is groter dan 5.
Bereken deze startwaarde exact.

We bekijken het gedrag van de rij voor startwaarden tussen $\frac{5}{6}$ en $\frac{7}{6}$.
Veronderstel dat je voor alle startwaarden tussen $\frac{5}{6}$ en $\frac{7}{6}$ de eerste stap tekent van de webgrafiek. In figuur 8 is de strook die dan ontstaat met grijs aangegeven. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 8

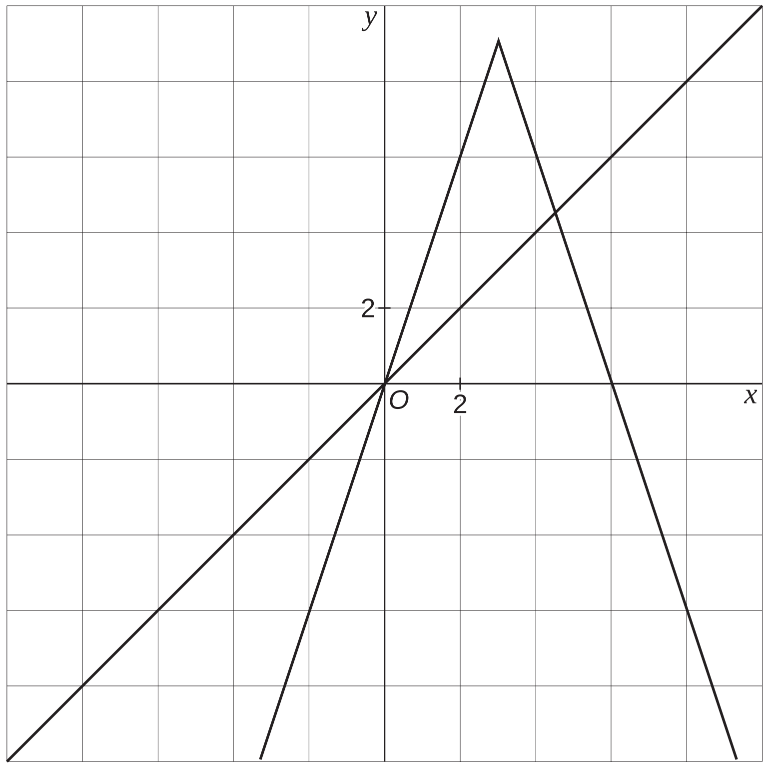


Wanneer je voor alle startwaarden tussen $\frac{5}{6}$ en $\frac{7}{6}$ het vervolg van de webgrafiek tekent, ontstaat het vervolg van de strook.

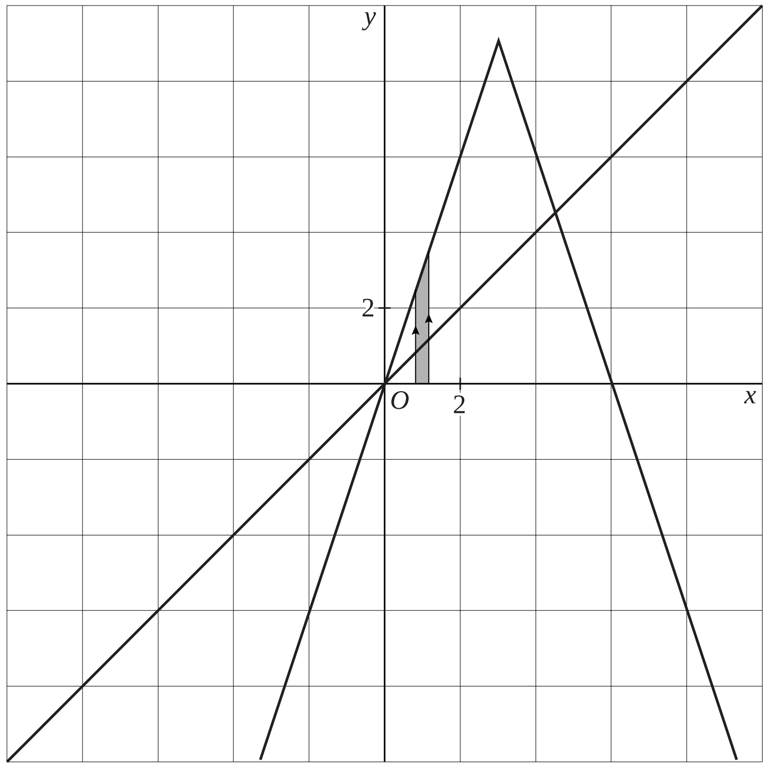
5p **15** Onderzoek met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage of de rijen met startwaarden tussen $\frac{5}{6}$ en $\frac{7}{6}$ convergeren.

uitwerkbijlage

13



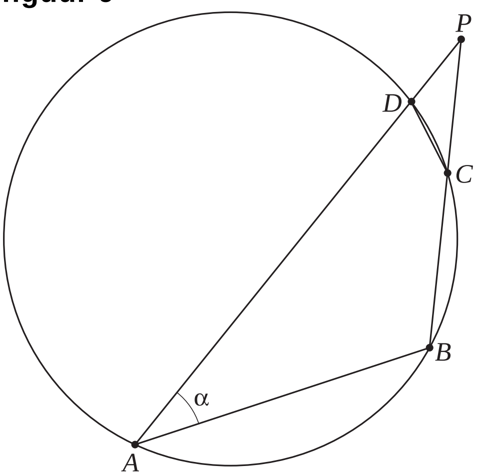
15



Koordenvierhoeken

De hoekpunten van vierhoek $ABCD$ liggen op een cirkel. AB is groter dan CD en AD is groter dan BC. De lijnen AD en BC snijden elkaar in P.
Verder is gegeven dat $AB = BP$.
Stel $\angle BAD = \alpha$. Zie figuur 9. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 9

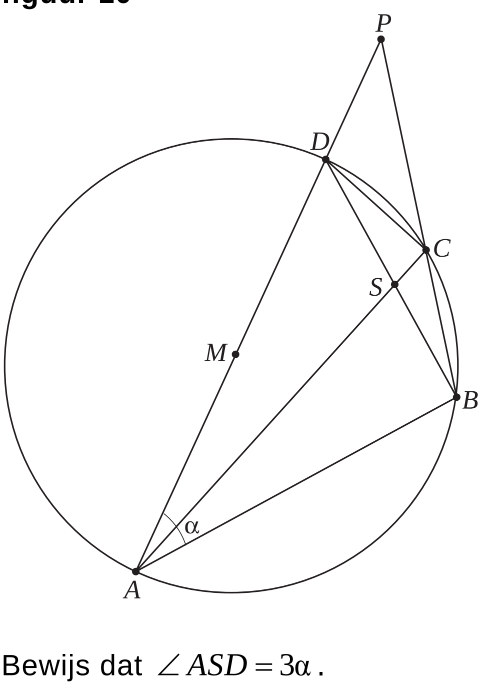


Er geldt: $DC = DP$.

5p **16** Bewijs dit.

Nu is bovendien gegeven dat AD een middellijn is van de cirkel; het middelpunt M van de cirkel ligt dus op AD. Het punt S is het snijpunt van AC en BD.
Zie figuur 10. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

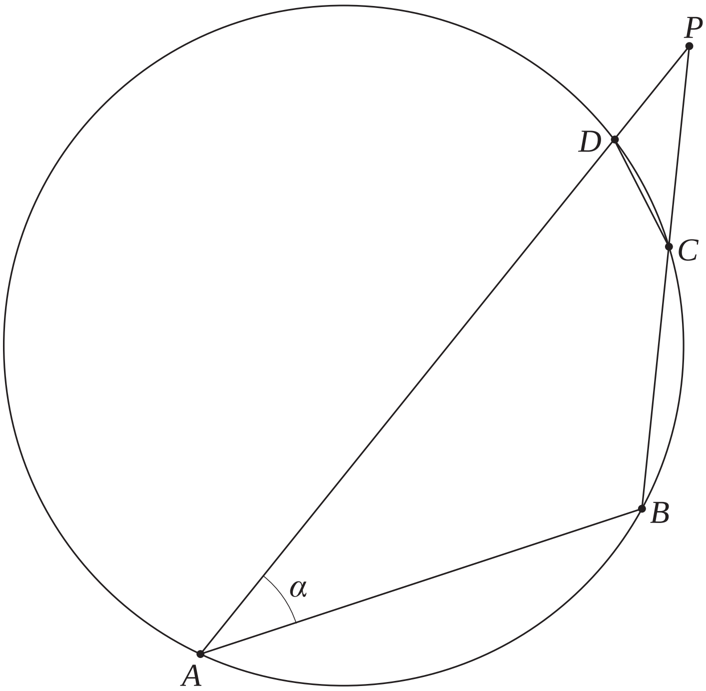
figuur 10



5p **17** Bewijs dat $\angle ASD = 3\alpha$.

uitwerkbijlage

16



17