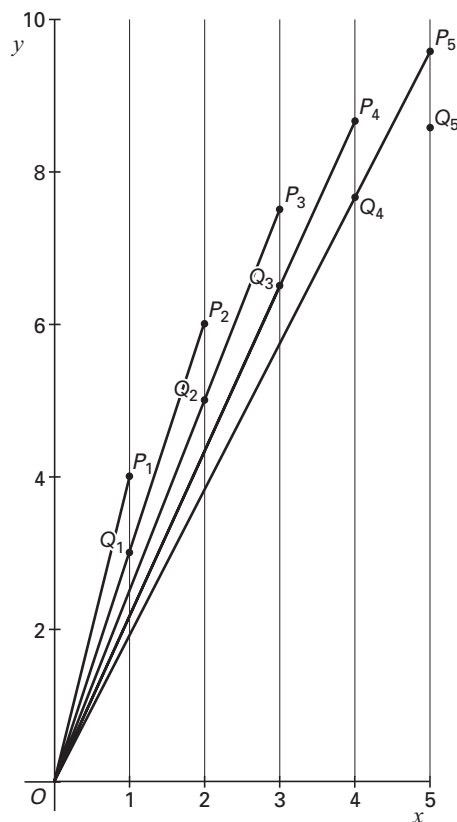


## ■ Een rij punten

We definiëren in een assenstelsel twee rijen punten  $P_n$  en  $Q_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) als volgt:

- $P_1$  is het punt  $(1, 4)$ .  
 $Q_1$  ligt recht onder  $P_1$ , op afstand 1 van  $P_1$ , dus  $Q_1 = (1, 3)$ .
  - $P_2$  is het snijpunt van de lijn  $OQ_1$  met de lijn  $x = 2$ .  
 $Q_2$  ligt recht onder  $P_2$ , op afstand 1 van  $P_2$ .
  - $P_3$  is het snijpunt van de lijn  $OQ_2$  met de lijn  $x = 3$ .  
 $Q_3$  ligt recht onder  $P_3$ , op afstand 1 van  $P_3$ .  
 Enzovoort.
- In figuur 7 zijn van beide rijen de eerste vijf punten aangegeven.

figuur 7

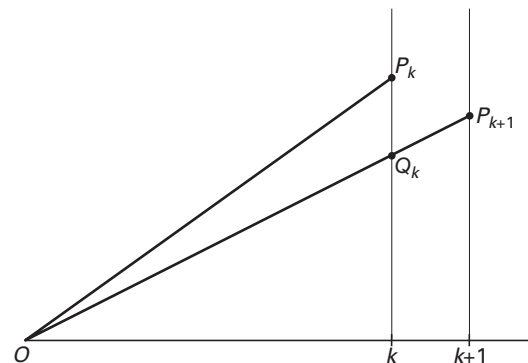


De richtingscoëfficiënt van de lijn  $OP_k$  noemen we  $r_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Van de rij van richtingscoëfficiënten kun je de eerste drie termen uitrekenen:  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = 3$  en  $r_3 = 2\frac{1}{2}$ .

Uit elke term  $r_k$  kan de volgende term  $r_{k+1}$  berekend worden met de recursieve formule:  
 $r_{k+1} = r_k - \frac{1}{k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

Zie figuur 8. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 8



- 4p **17** □ Toon de juistheid van de recursieve formule aan.

Uit figuur 7 blijkt dat de hoogtes van de eerste vijf punten  $P_1, P_2, P_3, P_4$  en  $P_5$  weliswaar een stijgende rij vormen, maar dat de toenames in hoogte steeds minder worden. Hoe het verdere verloop van de hoogtes is, is niet onmiddellijk duidelijk.

- 4p **18** □ Onderzoek met behulp van de grafische rekenmachine voor welke waarden van  $n$  de punten  $P_n$  onder de  $x$ -as liggen. Licht je werkwijze toe.

Ook zonder grafische rekenmachine kan worden aangetoond dat de punten  $P_n$  voor voldoende grote waarden van  $n$  onder de  $x$ -as komen te liggen. Daarvoor mag je gebruiken

dat de limiet voor  $n$  nadert tot oneindig van  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  oneindig is.

- 4p **19** □ Toon met behulp van deze limiet aan dat de punten  $P_n$  voor voldoende grote waarden van  $n$  onder de  $x$ -as liggen.

## Uitwerkbijlage bij vraag 17

Vraag 17

