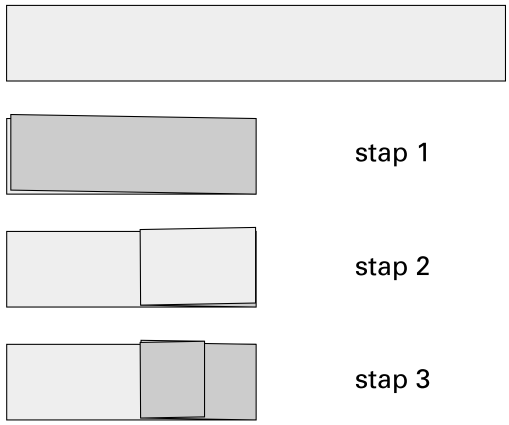
Vouwen

Van een strook papier van 14 cm lengte zit de rechterrand los en is de linkerrand vastgeplakt op de ondergrond. De strook wordt linksom dubbelgevouwen (stap 1 in figuur 2); hierbij verdeelt de vouwlijn de strook in twee gelijke delen. Het bovenste deel wordt rechtsom dubbelgevouwen (stap 2 in figuur 2). Daarna wordt het bovenste deel hiervan weer linksom dubbelgevouwen (stap 3 in figuur 2). Dit proces kan in theorie eindeloos herhaald worden. We willen de limiet van de plaats van de losse rand weten.

figuur 2

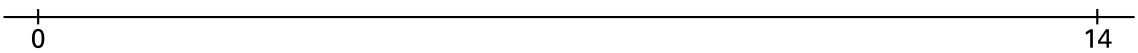


De plaats van de losse rand na n keer vouwen noemen we u_n.
De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is gegeven door:

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_1 = 0 \\ u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2}) \quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{cases}$$

In figuur 3 zijn op een getallenlijn de startwaarden 14 en 0 aangegeven.

figuur 3



4p **2** □ Geef op de getallenlijn de plaats aan van u_3 en u_4. Licht je werkwijze toe.

De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is convergent. Om de plaats op de getallenlijn van $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ te berekenen, bekijken we de verschilrij $v_k = u_k - u_{k-1}$ $(k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

5p **3** □ Bewijs dat voor $k = 2, 3, 4, \ldots$ geldt: $v_k = -\frac{1}{2} v_{k-1}$

De termen van de rij u_n zijn te vinden met behulp van de rij v_k:

$u_1 = u_0 + v_1$
$u_2 = u_0 + v_1 + v_2$
$u_3 = u_0 + v_1 + v_2 + v_3$
$\vdots$
$u_n = u_0 + v_1 + \ldots + v_n$

7p **4** □ Toon aan dat voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ geldt: $u_n = 14 + 9\frac{1}{3}((-\frac{1}{2})^n - 1)$.

4p **5** □ Bereken exact de limiet van de plaats van de losse rand.