Kostenfuncties

In de economie onderscheidt men de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product:

– de totale kosten $T(q)$.
– de marginale kosten $M(q)$, die benaderd kunnen worden door $T'(q)$.
  In deze opgave geldt: $M(q) = T'(q)$
– de gemiddelde kosten $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

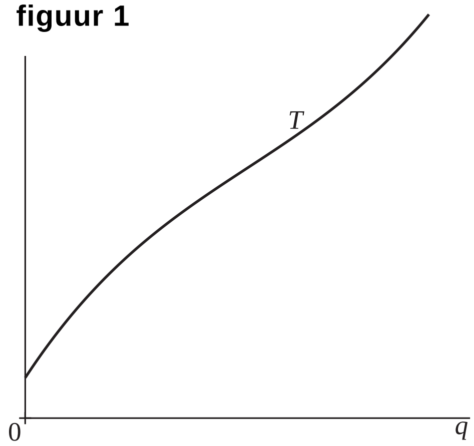
Voor een bepaald product kunnen de totale kosten van de productie worden berekend met de formule $T(q) = 0,2 \cdot q^3 - 1,2 \cdot q^2 + 4,2 \cdot q + 1$, met q de geproduceerde hoeveelheid in duizendtallen en $T(q)$ de totale kosten in duizenden euro's.

4p **15** Bereken met behulp van differentiëren bij welke productiehoeveelheid q de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn.

In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. In figuur 1 is deze situatie weergegeven.

Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven. Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden: $a > 0$, $c > 0$ en $d > 0$. Een voorwaarde voor b kan worden gevonden door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er dus een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

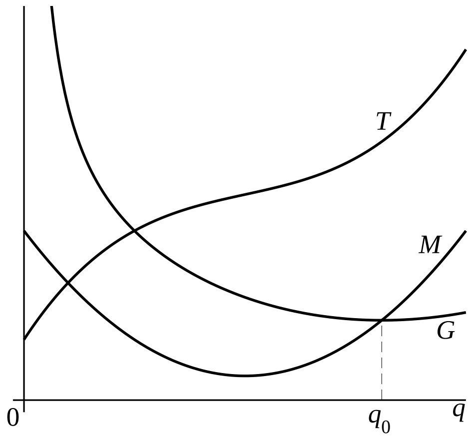
figuur 1



5p **16** Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

In figuur 2 is de grafiek van een willekeurige totale kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken.
Ook zijn in figuur 2 de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde kostenfunctie G met $G(q) = \frac{T(q)}{q}$.
Verder is in figuur 2 aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0) = 0$

figuur 2



Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

4p **17** Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

.