

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een symmetrische gebroken functie

1 maximumscore 3

- $\frac{2}{1+e^x} < \frac{1}{100}$ is (omdat $1+e^x$ positief is voor iedere x) gelijkwaardig met $1+e^x > 200$ 2
 - Dit geeft $e^x > 199$, dus de oplossing is $x > \ln 199$ 1
- of
- $\frac{2}{1+e^x} = \frac{1}{100}$ is gelijkwaardig met $1+e^x = 200$ 1
 - $e^x = 199$ geeft $x = \ln 199$ 1
 - De oplossing is $x > \ln 199$, met toelichting 1

2 maximumscore 4

- De afgeleide van $2x - 2\ln(1+e^x)$ is $2 - 2 \cdot \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x$ 2
- $2 - 2 \cdot \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x = \frac{2(1+e^x) - 2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{1+e^x}$ ($= f(x)$) 2

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

3 maximumscore 5

- De gevraagde oppervlakte is $\int_0^{\ln 3} f(x) dx = \left[2x - 2 \ln(1 + e^x) \right]_0^{\ln 3}$ 1
- Als $x = \ln 3$ dan $2x - 2 \ln(1 + e^x) = 2 \ln 3 - 2 \ln 4$ 1
- Als $x = 0$ dan $2x - 2 \ln(1 + e^x) = -2 \ln 2$, dus de gevraagde oppervlakte is $2 \ln 3 - 2 \ln 4 + 2 \ln 2$ 1
- $2 \ln 3 - 2 \ln 4 + 2 \ln 2 = \ln 9 - \ln 16 + \ln 4$ 1
(of: $2 \ln 3 - 2 \ln 4 + 2 \ln 2 = 2(\ln 3 - \ln 4 + \ln 2) = 2 \ln(\frac{3}{4} \cdot 2)$)
- $\ln 9 - \ln 16 + \ln 4 = \ln(\frac{9}{16} \cdot 4) = \ln \frac{9}{4}$ (of: $2 \ln(\frac{3}{4} \cdot 2) = \ln(\frac{3}{2})^2 = \ln \frac{9}{4}$) 1

4 maximumscore 5

- $f(-x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$ 1
 - Dus $f(x) + f(-x) = \frac{2}{1 + e^x} + \frac{2}{1 + e^{-x}} = \frac{2(1 + e^{-x}) + 2(1 + e^x)}{(1 + e^x)(1 + e^{-x})}$ 1
 - De teller is gelijk aan $2(e^x + e^{-x} + 2)$ 1
 - De noemer is gelijk aan $1 + e^{-x} + e^x + 1 = e^x + e^{-x} + 2$ 1
 - Dit geeft $f(x) + f(-x) = \frac{2(e^x + e^{-x} + 2)}{e^x + e^{-x} + 2} = 2$ en dus $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$ 1
- of
- $f(-x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$ 1
 - Teller en noemer vermenigvuldigen met e^x geeft $f(-x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$ 2
 - Dit geeft $f(x) + f(-x) = \frac{2}{1 + e^x} + \frac{2e^x}{1 + e^x} = \frac{2 + 2e^x}{1 + e^x} = 2$, dus $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$ 2

Gelijke afstanden

5 maximumscore 4

- Uit de gegevens volgt: $LP = LQ$ en $PR = MQ$ 1
- Verder geldt $ML = MQ - LQ$ en $LR = PR - PL$ 1
- Dus $ML = LR$ 1
- Hieruit volgt: L ligt op de middelloodlijn van MR ; *middelloodlijn* 1

6 maximumscore 4

- De meetkundige plaats is een deel van de parabool met brandpunt M en richtlijn k 1
- De eindpunten van het betreffende deel van de parabool zijn de eindpunten van de cirkelboog 1
- De top van de parabool is getekend als midden van het loodlijnstuk vanuit M op k 1
- Minstens twee andere punten van het deel van de parabool zijn getekend door een punt R op k te kiezen en het snijpunt van de middelloodlijn van MR en de loodlijn door R op k te bepalen (of: door een cirkelboog te tekenen met middelpunt M en een straal die kleiner is dan de straal van de gegeven cirkelboog en snijpunten hiervan te bepalen met de lijn die parallel is met k en die tussen g en k ligt zo dat de afstand tot k gelijk is aan de straal van de nieuwe cirkelboog) 1

Het ontwerp van een brug

7 maximumscore 2

- Uit de vergelijking volgt dat de afstand tussen A en B gelijk is aan p 1
- Aan eis 1 is voldaan als $p \geq 8,00$ (of: $p > 8,00$) 1

8 maximumscore 5

- $\frac{dy}{dx} = 0,40 \cdot -\sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right) \cdot \frac{2\pi}{p}$ 2
- De maximale helling is (omdat p positief is en $-\frac{1}{2}p \leq x \leq \frac{1}{2}p$) $\frac{0,80\pi}{p}$ 1
- Beschrijven hoe de ongelijkheid $\frac{0,80\pi}{p} \leq \frac{1}{15}$ (met $p > 0$) kan worden opgelost 1
- Het antwoord: $p \geq 12\pi$ (of: $p \geq 37,7$) 1

9 maximumscore 4

- De lengte van boog AB is $\int_{-20,00}^{20,00} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ 2
- Beschrijven hoe deze integraal berekend kan worden 1
- De lengte van het brugdek (boog AB) is 40,04 meter 1

10 maximumscore 5

- De oppervlakte van de zijkant van het rechterdeel is gelijk aan $\int_{8,00}^{20,00} 0,40 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{20,00}x\right)\right) dx$ 2
- Beschrijven hoe deze integraal berekend kan worden 1
- Deze oppervlakte is ongeveer $2,38 \text{ (m}^2\text{)}$ 1
- (Er is ongeveer) $2 \cdot 3,50 \cdot 2,38 \approx 17 \text{ (m}^3\text{ beton nodig)}$ 1

Verticale en horizontale verbindingslijnstukken

11 maximumscore 5

- Opgelost moet worden $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$ 1
- Herleiden tot $a^2 - 6a + 6 = 0$ 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking algebraïsch opgelost kan worden 1
- De antwoorden $a = 3 - \sqrt{3}$ en $a = 3 + \sqrt{3}$ (of vergelijkbare uitdrukkingen) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

12 maximumscore 6

- De lengte van het verbindingslijnstuk op hoogte b is $\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b}$ 1
- De afgeleide van $\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b}$ is $-\frac{1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2}$ (of $-\frac{1}{2}b^{-1\frac{1}{2}} + b^{-2}$) 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $-\frac{1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2} = 0$ (of $-\frac{1}{2}b^{-1\frac{1}{2}} + b^{-2} = 0$) kan worden opgelost 1
- De oplossing $b = 4$ 1
- De maximale lengte is $\frac{1}{4}$ (of 0,25) 1

13 maximumscore 7

- $f(x) = 4$ geeft $\frac{1}{x} = 4$ dus $x = \frac{1}{4}$ en $g(x) = 4$ geeft $\frac{1}{x^2} = 4$ dus (omdat $x > 0$) $x = \frac{1}{2}$ 1
- De oppervlakte van V is $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4 - \frac{1}{x}) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}) dx$ 2
- Bijbehorende primitieven zijn $4x - \ln x$ en $-\frac{1}{x} - \ln x$ 2
- De oppervlakte van V is dus $(2 - \ln \frac{1}{2}) - (1 - \ln \frac{1}{4}) + (-1 - \ln 1) - (-2 - \ln \frac{1}{2})$ 1
- Het antwoord is $2 - \ln 4$ (of $2 - 2 \ln 2$ of $2 + \ln \frac{1}{4}$) 1

of

- $f(x) = 4$ geeft $\frac{1}{x} = 4$ dus $x = \frac{1}{4}$ en $g(x) = 4$ geeft $\frac{1}{x^2} = 4$ dus (omdat $x > 0$) $x = \frac{1}{2}$ 1
- De oppervlakte van V is $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \cdot 4 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} dx - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{x} dx$ 2
- Bijbehorende primitieven zijn $-\frac{1}{x}$ en $\ln x$ 2
- De oppervlakte van V is dus $1 + (-1 + 2) - (\ln 1 - \ln \frac{1}{4})$ 1
- Het antwoord is $2 - \ln 4$ (of $2 - 2 \ln 2$ of $2 + \ln \frac{1}{4}$) 1

Het midden van een koorde

14 maximumscore 3

- $\triangle MSP \cong \triangle MSQ$; (cirkel,) ZZZ 1
 - Hieruit volgt $\angle PSM = \angle QSM$. Verder geldt $\angle PSM + \angle QSM = 180^\circ$; gestrekte hoek, dus $\angle PSM = \angle QSM = 90^\circ$ 1
 - (Dit geeft $\angle CSM = 90^\circ$) dus S ligt op de cirkel met middellijn MC ; *Thales* 1
- of
- De loodlijn uit M op PQ snijdt PQ in het midden S ; *loodlijn op koorde* 2
 - Dus S ligt op de cirkel met middellijn MC ; *Thales* 1

Kostenfuncties

15 maximumscore 4

- $G(q) = 0,2 \cdot q^2 - 1,2 \cdot q + 4,2 + \frac{1}{q}$ 1
- $G'(q) = 0,4 \cdot q - 1,2 - \frac{1}{q^2}$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $0,4 \cdot q - 1,2 - \frac{1}{q^2} = 0$ kan worden opgelost 1
- Het antwoord $q \approx 3,2$ 1

16 maximumscore 5

- $M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ 1
 - Dus $M'(q) = (T''(q) =) 6a \cdot q + 2b$ 1
 - $M'(q) = (T''(q) =) 0$ geeft $6a \cdot q + 2b = 0$ ofwel $b = -3a \cdot q$ 1
 - q is een (productie)hoeveelheid en dus geldt $q > 0$ 1
 - Uit $q > 0$ en $a > 0$ volgt $b < 0$ 1
- of
- $M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ 1
 - De grafiek van M is (omdat $a > 0$) een dalparabool met $q_{top} = -\frac{2b}{2 \cdot 3a} = -\frac{b}{3a}$ 2
 - q is een (productie)hoeveelheid en dus geldt $q_{top} > 0$ 1
 - Uit $q_{top} > 0$ en $a > 0$ volgt $b < 0$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
17	maximumscore 4	
	• $G'(q) = \frac{T'(q) \cdot q - T(q) \cdot 1}{q^2}$	2
	• Uit $G'(q_0) = 0$ volgt $T'(q_0) \cdot q_0 - T(q_0) = 0$	1
	• Hieruit volgt $T'(q_0) = \frac{T(q_0)}{q_0}$, dus $M(q_0) = G(q_0)$	1

Twee snijdende cirkels

18	maximumscore 4	
	• $MB = MD$ en $NB = NC$; <i>cirkel</i> , dus $\angle MDB = \angle MBD$ en $\angle NCB = \angle NBC$; <i>gelijkbenige driehoek</i>	1
	• $\angle MBD = \angle NBC$; <i>overstaande hoeken</i>	1
	• Dus $\angle MDB = \angle NCB$ ofwel $\angle MDN = \angle NCM$	1
	• Hieruit volgt dat de punten C en D op dezelfde cirkelboog MN liggen; <i>constante hoek</i> (dus M, N, C en D liggen op één cirkel)	1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per school in het programma WOLF.
 Zend de gegevens uiterlijk op 24 juni naar Cito.