

## Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Wisselingen in rijtjes kop en munt

**1 maximumscore 4**

- Er zijn 2 rijtjes met 0 wisselingen, 6 rijtjes met 1 wisseling, 6 rijtjes met 2 wisselingen en 2 rijtjes met 3 wisselingen 1
  - De kansen op 0, 1, 2 en 3 wisselingen zijn  $\frac{2}{16}$ ,  $\frac{6}{16}$ ,  $\frac{6}{16}$  en  $\frac{2}{16}$  2
  - De verwachtingswaarde is dus  $\frac{2}{16} \cdot 0 + \frac{6}{16} \cdot 1 + \frac{6}{16} \cdot 2 + \frac{2}{16} \cdot 3 = \frac{24}{16} = 1\frac{1}{2}$  1
- of
- Er zijn drie plekken in een rij van vier worpen waar al of niet een wisseling optreedt 2
  - Voor elke plek is de kans  $\frac{1}{2}$  dat er een wisseling optreedt 1
  - De verwachtingswaarde is dus  $3 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$  1

**2 maximumscore 3**

- Op 5 van de 9 plekken moet een wisseling plaatsvinden; dit kan op  $\binom{9}{5}$  manieren 1
- $\binom{9}{5} = 126$  1
- Als de wisselingen vastliggen, kan een rijtje nog met een K of een M beginnen; dus zijn er  $2 \cdot 126 = 252$  rijtjes met 5 wisselingen 1

**3 maximumscore 3**

- De kans dat een rijtje ten minste één wisseling heeft, is  $(1 - \frac{2}{1024}) = \frac{1022}{1024}$  1
- De kans op 20 keer zo'n rijtje is  $(\frac{1022}{1024})^{20} \approx 0,962$  2

**4 maximumscore 5**

- De kans dat een willekeurig rijtje meer dan 5 wisselingen heeft, is  $\frac{168+72+18+2}{1024} = \frac{260}{1024} = \frac{65}{256}$  1
- Het gaat om een binomiale kans met  $n = 20$  en  $p = \frac{65}{256}$  1
- Beschrijven hoe de binomiale kans  $P(X \geq 9 \mid n = 20 \text{ en } p = \frac{65}{256})$  berekend kan worden, waarbij  $X$  het aantal rijtjes met meer dan 5 wisselingen is 1
- De kans is (ongeveer) 0,045 1
- Deze kans is kleiner dan 5%, dus we vertrouwen Jolly niet 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Een gebroken functie

### 5 maximumscore 5

- $\frac{60}{x} = 18 - x$  geeft  $60 = 18x - x^2$  1
- Hieruit volgt  $x^2 - 18x + 60 = 0$  1
- De discriminant van deze vergelijking is 84 1
- De  $x$ -coördinaten van de snijpunten zijn  $9 + \sqrt{21}$  en  $9 - \sqrt{21}$  (of gelijkwaardige uitdrukkingen) 2

### 6 maximumscore 5

- $f'(x) = -\frac{60}{x^2}$  1
- De richtingscoëfficiënt van  $ST$  is  $-\frac{60}{p^2}$  (dus  $y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + b$  is voor zekere  $b$  een vergelijking van  $ST$ ) 1
- De  $y$ -coördinaat van  $P$  is  $\frac{60}{p}$  1
- De coördinaten van  $P$  invullen in  $y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + b$  geeft  $\frac{60}{p} = -\frac{60}{p^2} \cdot p + b$  1
- $\frac{60}{p} = -\frac{60}{p} + b$  geeft  $b = \frac{120}{p}$ , dus een vergelijking van de raaklijn  $ST$  is  $y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + \frac{120}{p}$  1

### 7 maximumscore 4

- Invullen van  $x = 0$  in de vergelijking van de raaklijn geeft  $y = \frac{120}{p}$  (dus  $T\left(0, \frac{120}{p}\right)$ ) 1
- Invullen van  $y = 0$  in de vergelijking van de raaklijn geeft  $\frac{60}{p^2} \cdot x = \frac{120}{p}$  1
- Hieruit volgt  $x = 2p$  (dus  $S(2p, 0)$ ) 1
- De oppervlakte van driehoek  $OST$  is  $\frac{1}{2} \cdot 2p \cdot \frac{120}{p} = 120$  (dus onafhankelijk van  $p$  en daardoor onafhankelijk van de plaats van  $P$  op de grafiek van  $f$ ) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**Oppervlakte en inhoud bij  $f(x) = e^x$**

**8 maximumscore 6**

- Lijn  $AB$  heeft richtingscoëfficiënt  $\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$  1
- Voor lijn  $AB$  geldt de formule  $y = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot x + 1$  1
- De oppervlakte van het vlakdeel is  $\int_0^2 (\frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot x + 1 - e^x) dx$  1
- Een primitieve van  $\frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot x + 1 - e^x$  is  $\frac{1}{4}(e^2 - 1) \cdot x^2 + x - e^x$  2
- De gevraagde oppervlakte is 2 1

of

- De oppervlakte van het vlakdeel is het verschil tussen de oppervlakte van een trapezium en  $\int_0^2 e^x dx$  1
- De oppervlakte van het bedoelde trapezium is  $e^2 + 1$  2
- $\int_0^2 e^x dx = e^2 - 1$  2
- De gevraagde oppervlakte is 2 1

**9 maximumscore 6**

- De grafiek van  $g(x) = e^x - 1$  wordt om de  $x$ -as gewenteld 1
- De inhoud is  $\int_0^2 \pi \cdot (e^x - 1)^2 dx$  1
- $(e^x - 1)^2 = e^{2x} - 2e^x + 1$  1
- Een primitieve van  $e^{2x} - 2e^x + 1$  is  $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x$  2
- De inhoud is  $\pi \cdot (\frac{1}{2}e^4 - 2e^2 + 3\frac{1}{2})$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Elo

### 10 maximumscore 3

- Er geldt:  $P(X > x | \mu = 2345, \sigma = 200) = 0,4$  1
- Beschrijven hoe hieruit  $x$  kan worden berekend 1
- $x \approx 2396$  1

### 11 maximumscore 5

- De verwachte score van A per partij is  $P(X > 2400 | \mu = 2345, \sigma = 200)$  1
- Beschrijven hoe deze kans kan worden berekend 1
- De verwachte score van A per partij is (ongeveer) 0,392 1
- $V \approx 12 \cdot 0,392 \approx 4,7$  1
- De nieuwe rating van A is  $2345 + 10 \cdot (6\frac{1}{2} - 4,7) = 2363$  1

## Een parabool?

### 12 maximumscore 4

- $A(4, 4)$  en  $B(-6, 6)$  1
- Als  $a = 4$  is de formule  $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$  1
- De coördinaten van A voldoen, want  $4 = -\frac{1}{5} \cdot 4 + 4\frac{4}{5}$  1
- De coördinaten van B voldoen ook, want  $6 = -\frac{1}{5} \cdot -6 + 4\frac{4}{5}$   
(dus de formule is juist voor  $a = 4$ ) 1

of

- $A(4, 4)$  en  $B(-6, 6)$  1
- De lijn door  $A(4, 4)$  en  $B(-6, 6)$  heeft richtingscoëfficiënt  $-\frac{1}{5}$  1
- Voor lijn AB geldt dus  $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 4)$ , ofwel  $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$  1
- $a = 4$  invullen in de gegeven formule geeft ook  $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$   
(dus de formule is juist voor  $a = 4$ ) 1

Vraag	Antwoord	Scores
<b>13</b>	<b>maximumscore 4</b>	
	• Voor het snijpunt met de y-as geldt $y = -\frac{1}{5}a^2 + 2a$	1
	• $\frac{dy}{da} = -\frac{2}{5}a + 2$	1
	• $\frac{dy}{da} = 0$ geeft $a = 5$	1
	• De grootste waarde van y is $-\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 5$	1
	of	
	• Voor het snijpunt met de y-as geldt $y = -\frac{1}{5}a^2 + 2a$	1
	• $-\frac{1}{5}a^2 + 2a = 0$ geeft $a(-\frac{1}{5}a + 2) = 0$ dus $a = 0$ of $a = 10$	1
	• Hieruit volgt dat het maximum wordt aangenomen voor $a = 5$	1
	• De grootste waarde van y is $-\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 5$	1
<b>14</b>	<b>maximumscore 4</b>	
	• Invullen van (0, 5) geeft $c = 5$	1
	• Invullen van (-10, 10) en (10, 10) geeft $100a - 10b + 5 = 10$ respectievelijk $100a + 10b + 5 = 10$	1
	• Beschrijven hoe hieruit de waarden van a en b berekend kunnen worden	1
	• $b = 0$ en $a = \frac{1}{20}$	1
<b>15</b>	<b>maximumscore 6</b>	
	• De afgeleide van $\frac{1}{20}x^2 + 5$ is $\frac{1}{10}x$	1
	• $x = 4$ invullen geeft $\frac{2}{5}$ als richtingscoëfficiënt van de raaklijn	1
	• Een vergelijking van de raaklijn in $(4, 5\frac{4}{5})$ is $y = \frac{2}{5}x + 4\frac{1}{5}$	1
	• De raaklijn is een van de lijnen AB als $\frac{1}{5}a - 1 = \frac{2}{5}$ en $-\frac{1}{5}a^2 + 2a = 4\frac{1}{5}$	1
	• $\frac{1}{5}a - 1 = \frac{2}{5}$ geeft $a = 7$	1
	• $a = 7$ invullen in $-\frac{1}{5}a^2 + 2a$ geeft $4\frac{1}{5}$ (en dus is de raaklijn aan de parabool in $(4, 5\frac{4}{5})$ een van de lijnen AB)	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Jupiter en Aarde

**16 maximumscore 3**

- Per jaar legt Aarde  $2\pi \cdot 150$  miljoen km af 1
- Een jaar telt  $365 \cdot 24$  uur 1
- De snelheid is (ongeveer) 108 000 (km/uur) 1

**17 maximumscore 3**

- $\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)} = 5$  1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Het gevraagde tijdstip is  $t \approx 0,26$  1

**18 maximumscore 5**

- De snelheid is de afgeleide van  $\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)}$  1
- De afgeleide van  $26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)$  is  $\frac{110}{6} \pi \cdot \sin(\frac{11}{6} \pi t)$  1
- De afgeleide van  $\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)}$  is  $\frac{\frac{110}{6} \pi \cdot \sin(\frac{11}{6} \pi t)}{2\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)}}$  2
- Op tijdstip  $t = 3$  is de snelheid (waarmee de afstand afneemt ongeveer) 5,65 (AE/jaar) (of: op tijdstip  $t = 3$  is de snelheid (ongeveer)  $-5,65$  (AE/jaar)) 1

*Opmerking*

*Als de kettingregel niet gebruikt is, maximaal 3 punten toekennen.*

**19 maximumscore 5**

- Er geldt dan  $\cos 2\pi t = \cos \frac{1}{6} \pi t$  en  $\sin 2\pi t = \sin \frac{1}{6} \pi t$  2
- Beschrijven hoe de kleinste positieve oplossing van deze vergelijkingen gevonden kan worden 2
- Het eerstvolgende tijdstip na  $t = 0$  dat aan beide vergelijkingen voldoet, is  $t = \frac{12}{11}$  (of  $t \approx 1,091$ ) 1