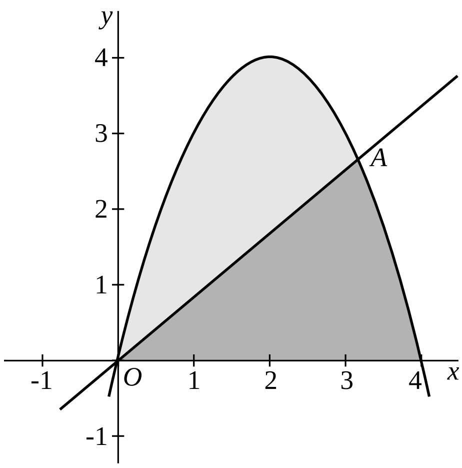
Gelijke oppervlakten

De parabool met vergelijking $y = 4x - x^2$ en de x-as sluiten een vlakdeel V in. De lijn $y = ax$ (met $0 \leq a < 4$) snijdt de parabool in de oorsprong O en in punt A. Zie figuur 1.

figuur 1



A heeft de coördinaten $(4 - a\ ,\ 4a - a^2)$.

4p **1** Toon dit aan.

Het deel van V boven de lijn OA heeft oppervlakte $\frac{1}{6}(4-a)^3$.

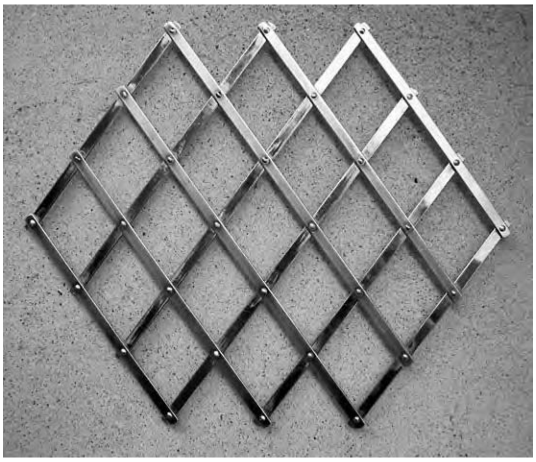
6p **2** Toon dit aan.

5p **3** Bereken exact voor welke waarde van a de lijn $y = ax$ het gebied V verdeelt in twee delen met gelijke oppervlakte.

Onderzetter

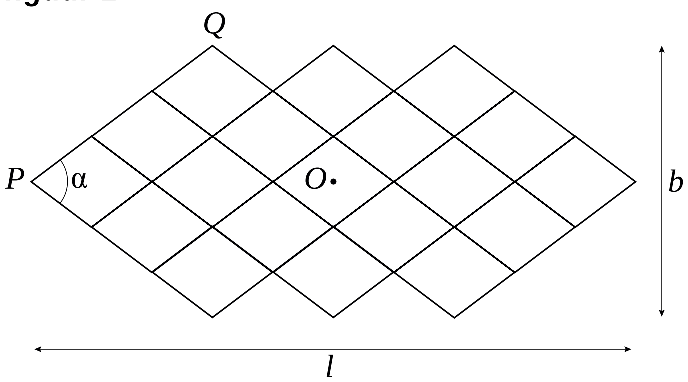
Een bepaalde onderzetter bestaat uit staven die onderling kunnen scharnieren. Deze onderzetter heeft 19 gelijke ruiten. Zie de foto.

foto



In een wiskundig model van deze onderzetter worden de breedte en de dikte van de staven verwaarloosd.
Het meest linkse scharnierpunt van het model noemen we P, het scharnierpunt linksboven noemen we Q en het midden van de middelste ruit noemen we O. De grootte van de binnenhoek bij P in radialen noemen we α. Zie figuur 1.

figuur 1



We kiezen lengte 1 voor de zijde van een ruit.
De lengte l en de breedte b van het model zijn functies van α, waarbij $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Er geldt: $l = 10\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ en $b = 6\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

3p **4** Toon aan dat de formules voor l en b juist zijn.

4p **5** Bereken exact de waarde van b als $l = 8$.

Als we α van 0 tot π laten toenemen, zal b toenemen en l afnemen.

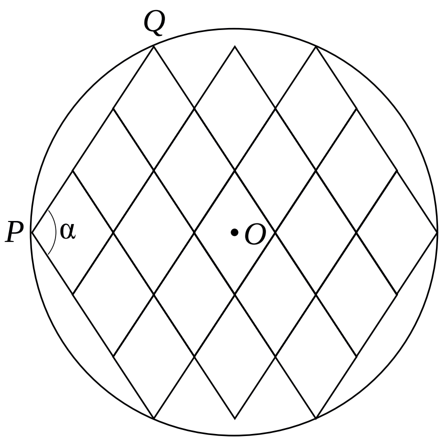
5p **6** Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van α de breedte b even snel toeneemt als de lengte l afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Er geldt: $OQ = \sqrt{4 + 5\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$

5p **7** Toon aan dat de formule voor OQ juist is.

Het model van de onderzetter kan zodanig gescharnierd worden dat zes van de acht buitenste scharnierpunten op één cirkel met middelpunt O liggen.
Zie figuur 2.

figuur 2



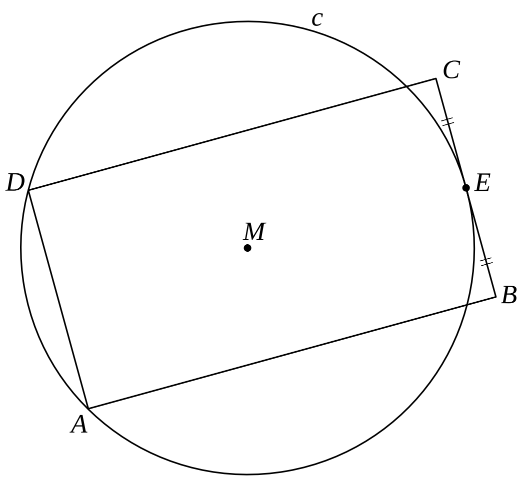
4p **8** Bereken voor welke waarde van α dit het geval is. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Aan een cirkel rakende rechthoeken

Gegeven is een cirkel c met middelpunt M en straal 3 cm. Op c ligt een vast punt A. Deze cirkel met punt A staat op de uitwerkbijlage.

We bekijken rechthoeken met hoekpunten A, B, C en D waarvan A en D op c liggen en waarvan zijde BC cirkel c raakt. Het raakpunt van de rechthoek met de cirkel is het midden E van BC. In figuur 1 is zo'n rechthoek getekend.

figuur 1

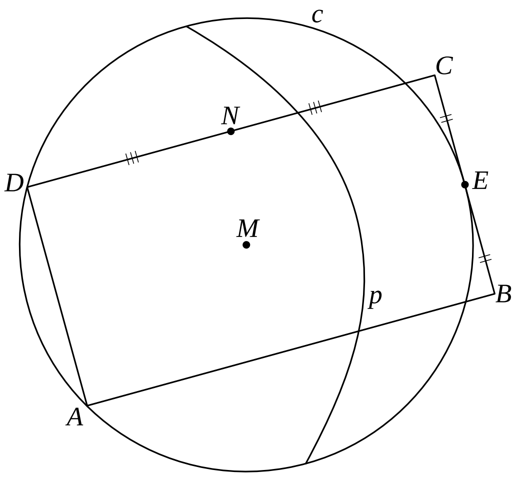


Er zijn vier van dergelijke rechthoeken waarvan de zijden BC en AD 4 cm lang zijn.

4p **9** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage alle mogelijke punten E waarbij aan bovenstaande eisen is voldaan. Licht je werkwijze toe.

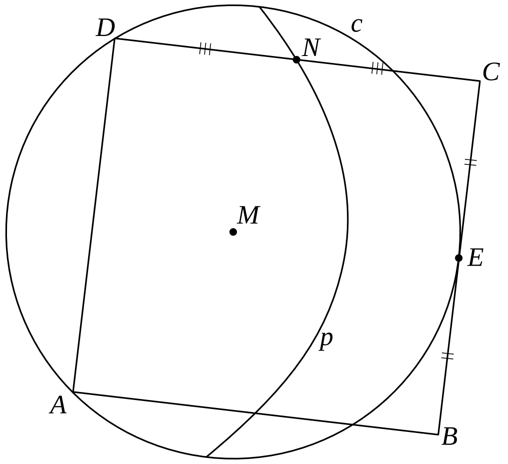
Bij een willekeurige rechthoek met hoekpunten A, B, C en D waarvan A en D op c liggen en waarvan zijde BC raakt aan c, wordt de parabool p getekend met brandpunt M en richtlijn de lijn BC.
Het midden van CD noemen we N. Zie figuur 2.

figuur 2



Wanneer we D over c bewegen, komt er een situatie waarbij N op p ligt. Zie figuur 3. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 3

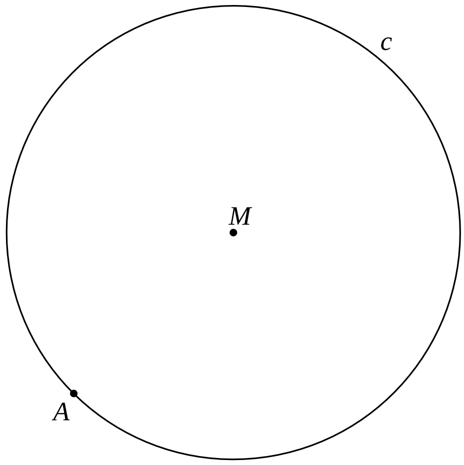


In dat geval geldt: $\angle CMD = 90°$

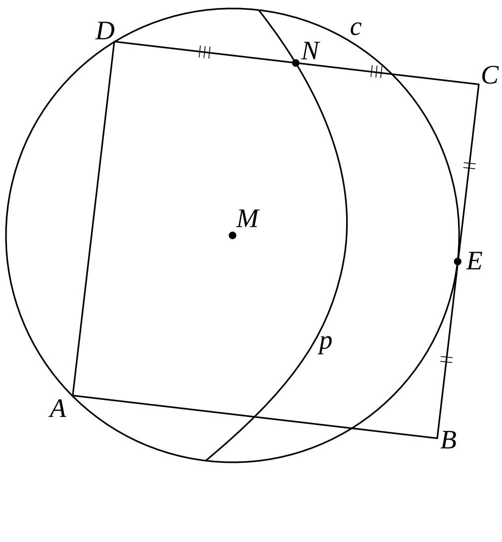
5p **10** Bewijs dit.

uitwerkbijlage

9



10



Condensatoren

Een condensator is een elektrische component waarin je elektrische lading kunt opslaan.
Iemand heeft een elektrisch circuit met één condensator gemaakt waarin geldt: als de lege condensator wordt opgeladen, neemt de condensatorspanning toe van 0 tot een limietspanning volgens de formule

$$U = 12 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2000C}}\right)$$

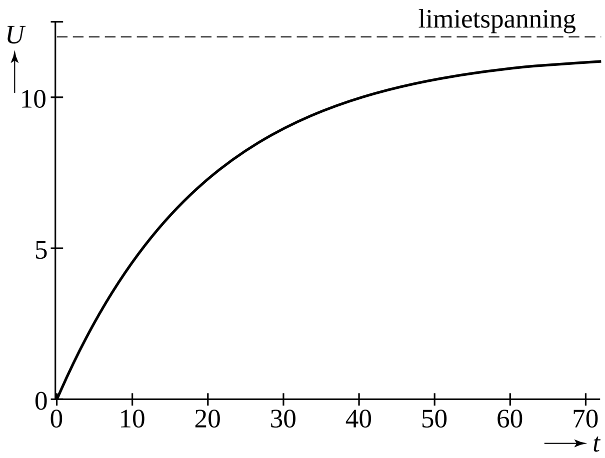
Hierin is: U de condensatorspanning in volt,
t de oplaadtijd in seconden en
C de capaciteit van de condensator in farad.

Een condensator met een capaciteit van 0,01 farad wordt in dit circuit opgeladen. Voor deze condensator in dit circuit geldt dus:

$$U = 12 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$$

In figuur 1 is de grafiek van deze U als functie van t getekend.

figuur 1



3p **11** Bereken met behulp van differentiëren met welke snelheid (in volt per seconde) de spanning van een condensator met een capaciteit van 0,01 farad toeneemt op tijdstip $t = 0$.

6p **12** Bereken algebraïsch hoe lang het duurt voordat bij een condensator met een capaciteit van 0,01 farad de condensatorspanning 90% van de limietspanning is. Rond je antwoord af op hele seconden.

Soms heb je niet direct de beschikking over een condensator met de juiste capaciteit. Om een kleinere capaciteit te krijgen, kun je meerdere condensatoren in serie schakelen. Een serieschakeling van n condensatoren met capaciteiten $C_1, \ldots, C_n$ heeft dezelfde werking als één condensator met capaciteit C_s, waarbij $\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n}$.

Zo hebben bijvoorbeeld twee in serie geschakelde condensatoren met een capaciteit van 0,01 farad dezelfde werking als één condensator met een capaciteit van 0,005 farad.

We willen in het bovengenoemde circuit binnen een tijd van 10 seconden een condensatorspanning van minstens 10 volt verkrijgen. We beschikken over een groot aantal lege condensatoren, elk met een capaciteit van 0,01 farad.

6p **13** Onderzoek hoeveel van deze condensatoren ten minste in serie geschakeld moeten worden om het gestelde doel te bereiken.

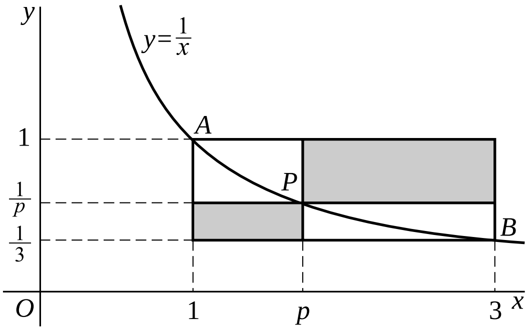
Een rechthoek in stukken

De punten $A(1, 1)$ en $B(3, \frac{1}{3})$ liggen op de grafiek van $y = \dfrac{1}{x}$.

We bekijken de rechthoek waarvan A en B hoekpunten zijn en waarvan twee zijden evenwijdig zijn aan de x-as (en de andere twee zijden dus evenwijdig zijn aan de y-as).

Een punt $P(p, \dfrac{1}{p})$ ligt op de grafiek van $y = \dfrac{1}{x}$, tussen A en B. De horizontale en de verticale lijn door P verdelen de rechthoek in vier rechthoekige stukken.
In figuur 1 zijn de stukken rechtsboven en linksonder grijs aangegeven.

figuur 1



5p **14** Bereken langs algebraïsche weg voor welke waarden van p de oppervlakte van het grijze stuk rechtsboven gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

De som van de oppervlakten van de grijze stukken rechtsboven en linksonder is $\frac{4}{3}(-p+4-\dfrac{3}{p})$.

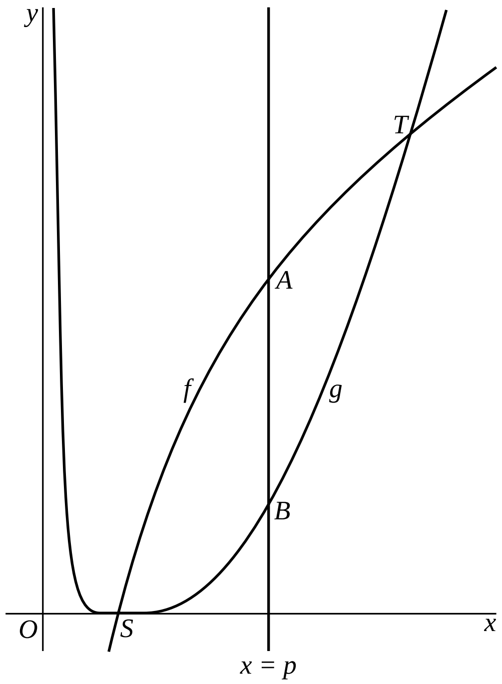
Er is een waarde van p waarvoor deze som van de oppervlakten maximaal is.

5p **15** Bereken exact deze waarde van p.

Logaritmen en vierde macht

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 4 \cdot \ln x$ en $g(x) = (\ln x)^4$ met $x > 0$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten S en T.
Een lijn $x = p$ snijdt tussen S en T de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.
Zie figuur 1.

figuur 1



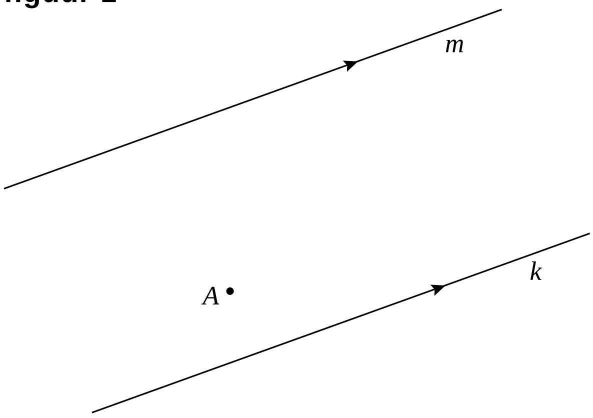
Er is een waarde van p waarvoor de lengte van lijnstuk AB maximaal is.

6p **16** Bereken exact de maximale lengte van AB. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Een geodriehoek

Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen k en m en een punt A er tussenin. Zie figuur 1.

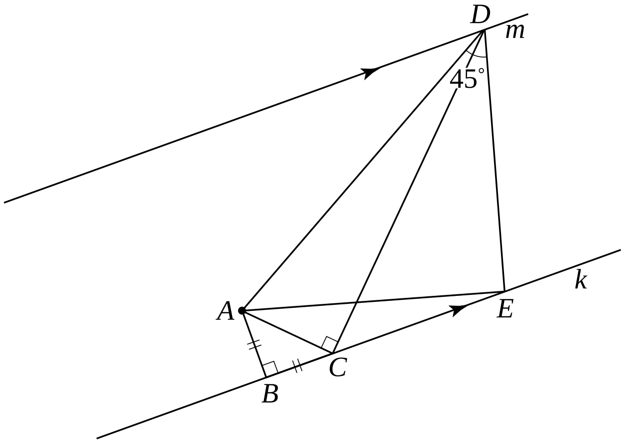
figuur 1



Je kunt op elk van de twee gegeven lijnen een punt tekenen zo dat deze punten samen met punt A de hoekpunten zijn van een rechthoekige, gelijkbenige driehoek. Een dergelijke driehoek noemen we een **geodriehoek**.
Er zijn verschillende gevallen mogelijk. In deze opgave bekijken we de situatie waarbij het hoekpunt van de rechte hoek van de geodriehoek rechts van punt A op k ligt. Hieronder staat eerst een constructie. Daarna wordt aan je gevraagd te bewijzen dat het resultaat inderdaad een geodriehoek is.

Op k zijn de punten B en C getekend zo dat $AB \perp BC$ en $AB = BC$. Punt D is op m getekend zo dat $DC \perp AC$.
Op k is vervolgens punt E getekend zo dat $\angle ADE = 45°$. Zie figuur 2. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Er geldt: vierhoek $ACED$ is een koordenvierhoek.

4p **17** Bewijs dit.

4p **18** Bewijs dat driehoek AED een geodriehoek is.

uitwerkbijlage

17 en 18