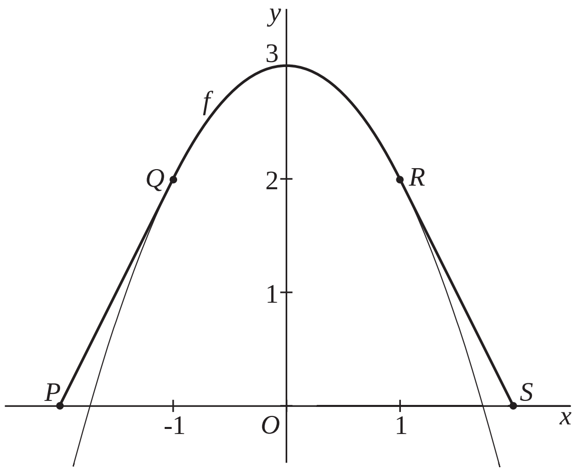
Over een parabool gespannen

In figuur 1 is de grafiek van de functie f met $f(x) = 3 - x^2$ getekend. Tussen twee punten P en S die even ver van O op de x-as liggen, wordt denkbeeldig een touwtje gespannen dat over deze parabool heen gaat. Het touwtje wordt zo gespannen dat het tussen de punten $Q(-1, 2)$ en $R(1, 2)$ precies over de parabool ligt; tussen P en Q en tussen R en S is het touwtje recht.
PQ en RS zijn raaklijnstukken aan de grafiek van f.

figuur 1



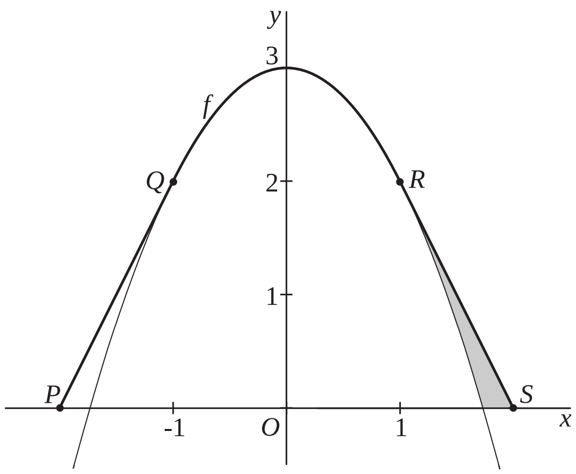
De x-coördinaat van S is 2.

4p **1** Toon dit aan.

5p **2** Bereken de lengte van het touwtje.

In figuur 2 is een vlakdeel grijs gekleurd. Dit vlakdeel wordt ingesloten door de grafiek van f, het lijnstuk RS en de x-as.

figuur 2

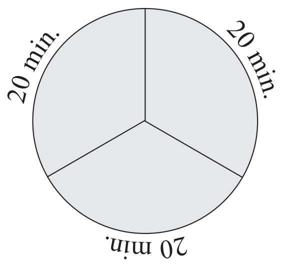


4p **3** Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.

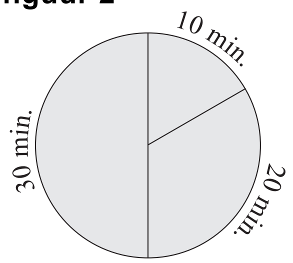
Wachten op de bus

Bij een evenement worden mensen vanaf een opstapplaats per bus vervoerd naar de ingang van de evenementenhal. Voortdurend pendelen drie bussen tussen de opstapplaats en de ingang. De reistijd van een bus (van de opstapplaats naar de ingang en terug) is gemiddeld 60 minuten.
In figuur 1 is de situatie weergegeven dat na elke 20 minuten een bus vertrekt. Neem aan dat voor mensen die met de bus mee willen, elk aankomsttijdstip op de opstapplaats even waarschijnlijk is. Een bezoeker aan het evenement komt dus met kans $\frac{1}{3}$ in elk van de drie tijdsintervallen tussen de vertrekkende bussen aan en voor elk van die tijdsintervallen is de te verwachten wachttijd 10 minuten. De verwachtingswaarde van de wachttijd is dus
$\frac{1}{3}\cdot 10+\frac{1}{3}\cdot 10+\frac{1}{3}\cdot 10=10$ minuten.
In figuur 2 is de situatie weergegeven dat de bussen vertrekken met tussenpozen van 10, 20 en 30 minuten.

figuur 1



figuur 2



4p **4** Bereken in de situatie van figuur 2 de verwachtingswaarde van de wachttijd voor een bezoeker aan het evenement.

De reistijd van de bussen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 60 minuten. Het kan natuurlijk voorkomen dat een rit wat langer of wat korter duurt. Men vindt dit acceptabel zo lang niet meer dan 10% van de ritten langer duurt dan 65 minuten.

4p **5** Bereken de maximale standaardafwijking van de reistijd van een bus waarbij aan deze eis voldaan is.

Veronderstel dat de reistijden van de bussen onafhankelijk zijn en alle een standaardafwijking van 3,4 minuten hebben.
We bekijken twee opeenvolgende bussen.

4p **6** Bereken de kans dat de eerste bus meer dan 65 minuten over de rit doet en de tweede bus minder dan 55 minuten.

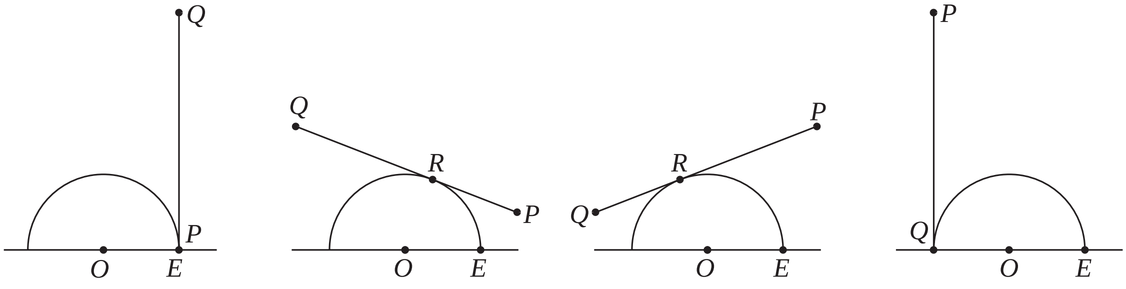
Het verschil in reistijd van twee opeenvolgende bussen is normaal verdeeld met standaardafwijking 4,8 minuten.

4p **7** Bereken de kans dat een bus minstens 8 minuten korter over de rit doet dan zijn voorganger.

Een buiteling

Een lijnstuk PQ met een lengte van π meter buitelt over een halve cirkel waarvan de straal OE 1 meter is. In figuur 1 zijn de beginstand, twee tussenstanden en de eindstand getekend. Het punt waarin PQ raakt aan de halve eenheidscirkel noemen we R. Dus op elk moment staat PQ loodrecht op OR en is het lijnstuk PR even lang als de cirkelboog ER.

figuur 1



beginstand: $R = P$

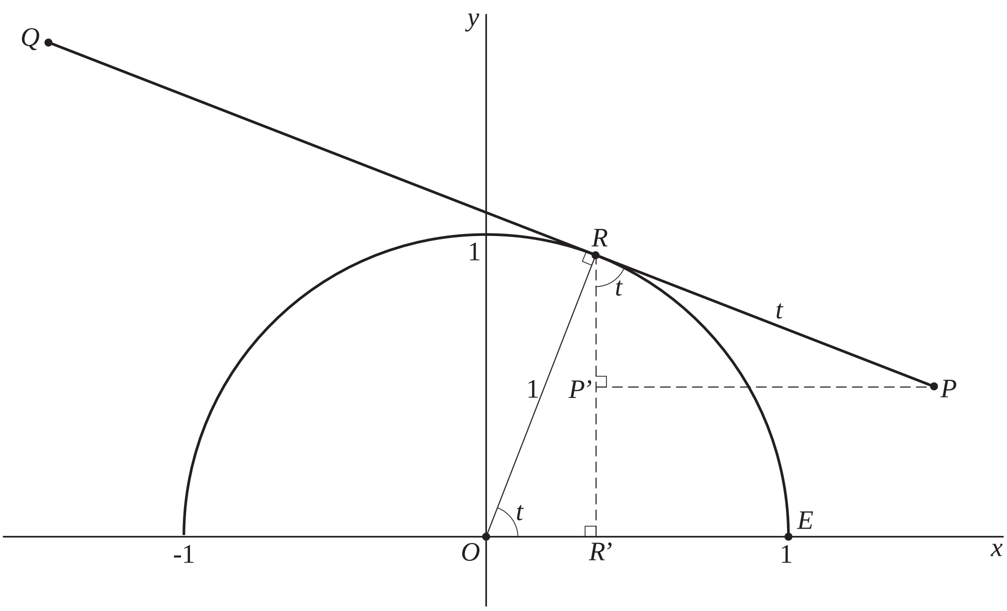
eindstand: $R = Q$

Het lijnstuk buitelt zó dat R met snelheid 1 m/s over de halve cirkel beweegt. Op tijdstip 0 begint PQ aan de buiteling; dan is het punt P nog in het punt E. In de figuur op de uitwerkbijlage is de halve cirkel getekend op schaal 1 : 25.

5p **8** Teken in die figuur het lijnstuk PQ na $\frac{2}{3}\pi$ seconden. Licht je werkwijze toe.

Er wordt een rechthoekig assenstelsel aangebracht zo dat O het punt (0, 0) is en E het punt (1, 0). Zie figuur 2.

figuur 2



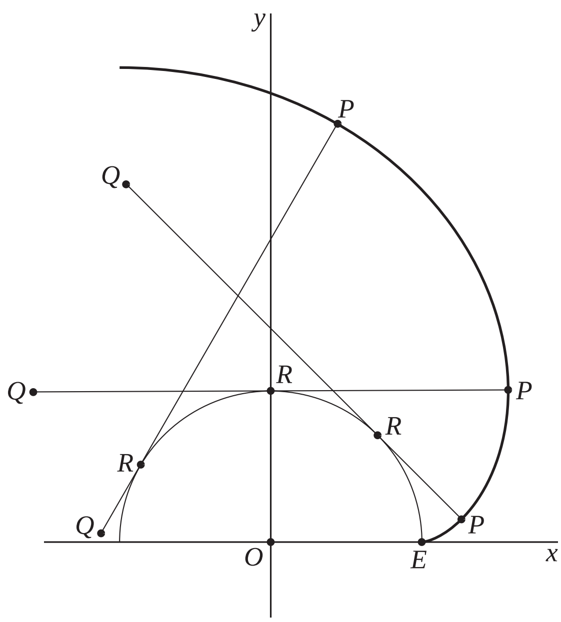
In figuur 2 is het lijnstuk PQ op tijdstip t getekend voor een waarde van t tussen 0 en π. Omdat de straal van de halve cirkel 1 m is en de snelheid van R gelijk is aan 1 m/s, geldt $\angle EOR = t$ (rad) en $RP = t$ (m).
De projectie van R op de x-as is R' en de projectie van P op RR' is P'.
Op elk tijdstip t geldt: $\angle PRP' = \angle ROR' = t$.
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

Voor de coördinaten van P geldt: $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + t \cdot \sin(t) \\ y(t) = \sin(t) - t \cdot \cos(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq \pi$.

3p **9** Toon de juistheid aan van de formule voor $x(t)$ met $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.

In figuur 3 zijn drie standen van PQ getekend en de gehele baan van P.

figuur 3

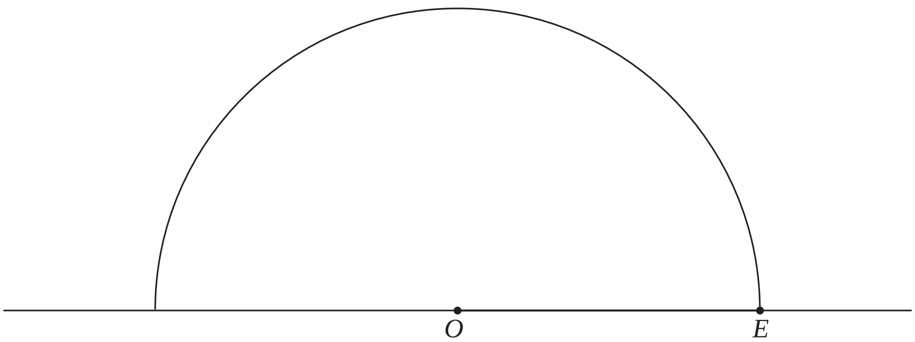


De grootte van de snelheid in m/s van het punt P na t seconden noemen we $v(t)$. Er geldt: $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

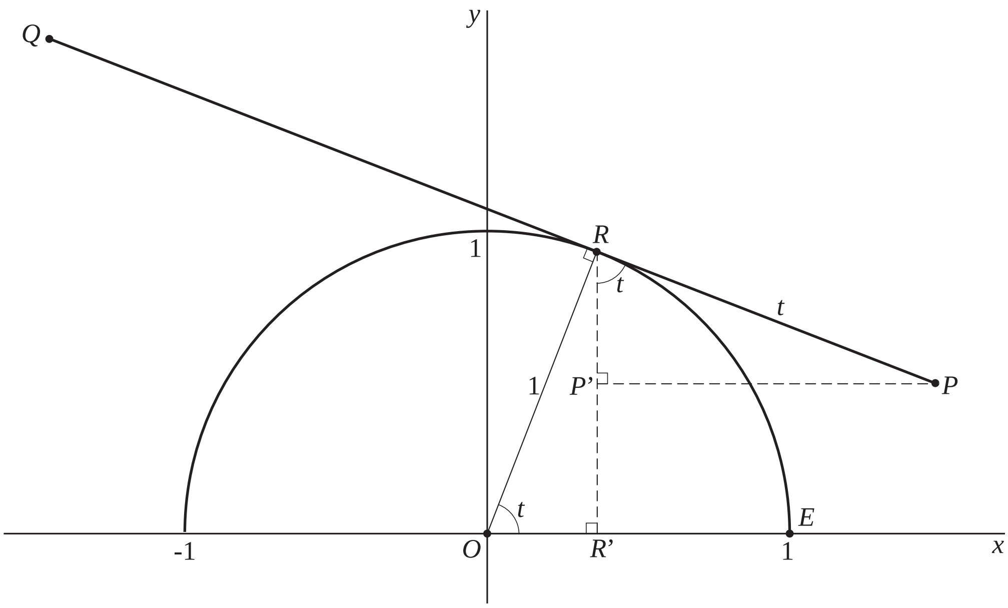
6p **10** Toon aan dat hieruit volgt: $v(t) = t$.

uitwerkbijlage

8



9



Acceleratietijd

De acceleratietijd van een auto is de tijd die de auto minimaal nodig heeft om vanuit stilstand een snelheid van 100 km/uur te bereiken.

Voor een bepaalde auto die zo snel mogelijk optrekt, geldt: $v(t) = 50 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}07t}\right)$.

Hierbij is $v(t)$ de snelheid in m/s na t seconden.

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ is de versnelling (acceleratie) in m/s^2.

De versnelling is het grootst als $t = 0$.

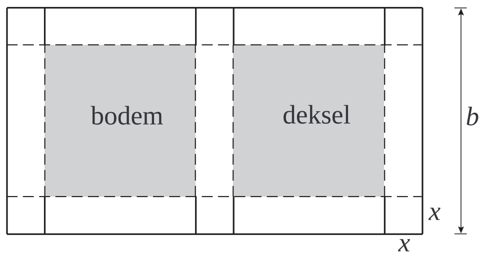
3p **11** Bereken met behulp van differentiëren die grootste versnelling.

4p **12** Bereken de acceleratietijd van de auto. Rond je antwoord af op hele seconden.

Dozen

Deze opgave gaat over dozen die op een bepaalde manier uit een rechthoekig stuk karton worden gemaakt. Denk aan een pizzadoos. Zie figuur 1.
Neem een stuk karton met een breedte van b cm. Wil je een doos maken die x cm hoog wordt, dan moet je voor de lengte van het stuk karton $2b-x$ cm nemen. Op zes plaatsen worden vierkantjes van x bij x cm losgesneden en omgevouwen. De stippellijnen zijn vouwlijnen; de doorgetrokken lijnen zijn snijlijnen. Bodem en deksel zijn allebei vierkant.

figuur 1



Voor de inhoud $I(x)$ van zo'n doos, in cm^3, geldt de formule:
$I(x) = 4x^3 - 4bx^2 + b^2x \quad (0 < x < \frac{1}{2}b)$

4p **13** Toon de juistheid van deze formule aan.

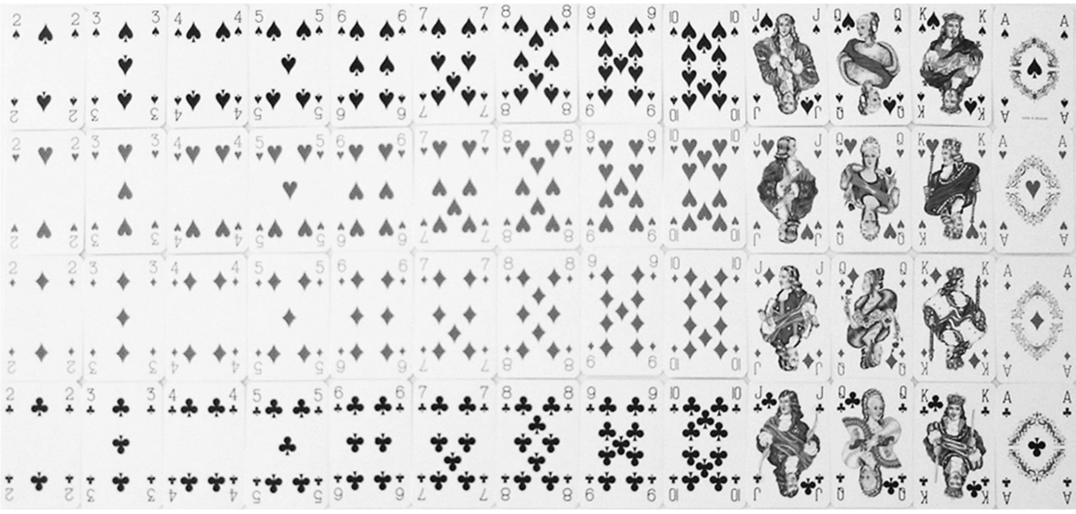
Voor elke positieve waarde van b heeft de inhoud $I(x)$ een maximale waarde.
Dit maximum wordt bereikt voor $x = \frac{1}{6}b$.

4p **14** Toon aan dat deze waarde van x juist is.

Bridge

Het kaartspel bridge wordt gespeeld met een pak van 52 kaarten. Er zijn vier ‘kleuren’: klaveren, ruiten, harten en schoppen. Van elke kleur zijn er 13 kaarten: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Boer, Vrouw, Heer, Aas. Zie onderstaande foto. De hoge kaarten 10, Boer, Vrouw, Heer en Aas heten **honneur**. In het begin van het spel krijgt een speler aselect 13 kaarten uit het pak: een zogenaamde **hand**.

foto



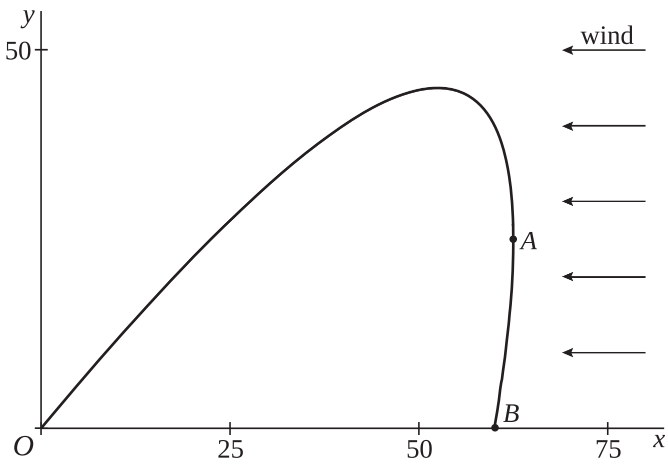
Lord Yarborough (1809-1897) bood aan om een speler ₤1000 te betalen als de speler een hand kreeg zonder honneurs. De speler moest hem dan wel voor elke andere hand (dus met minstens één honneur) ₤1 betalen. Een hand zonder honneurs wordt daarom wel een **yarborough** genoemd.

6p **15** Zal dit aanbod op den duur winst opgeleverd hebben voor Lord Yarborough? Licht je antwoord toe.

Een vuurpijl met tegenwind

Een vuurpijl wordt vanaf de grond schuin weggeschoten. Door tegenwind beschrijft de vuurpijl een baan zoals die in figuur 1 getekend is.

figuur 1



In deze figuur is een assenstelsel aangebracht met de x-as op de grond tegen de windrichting in en de y-as verticaal. In O wordt de vuurpijl afgeschoten. In B komt hij weer op de grond.
A is het punt van de baan dat het meest naar rechts ligt.
We gebruiken voor de baan de volgende formules:
voor het eerste deel OA van de baan geldt $y = 2x - 100 + 4 \cdot \sqrt{625 - 10x}$,
voor het tweede deel AB van de baan geldt $y = 2x - 100 - 4 \cdot \sqrt{625 - 10x}$,
met x en y in meter.

7p **16** Bereken op algebraïsche wijze de maximale hoogte die de vuurpijl bereikt.

3p **17** Bereken de x-coördinaat van A.

6p **18** Bereken op algebraïsche wijze op welke afstand van O de vuurpijl op de grond komt.