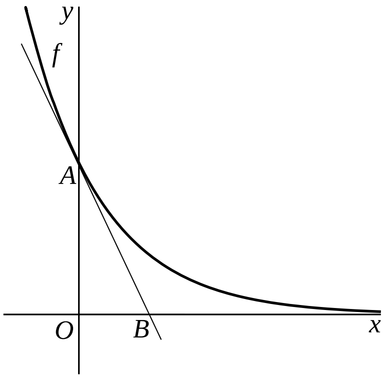
Een exponentiële functie

De functie f is gegeven door $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$. A is het snijpunt van de grafiek van f met de y-as. B is het snijpunt van de raaklijn aan de grafiek van f in A met de x-as. Zie figuur 1.

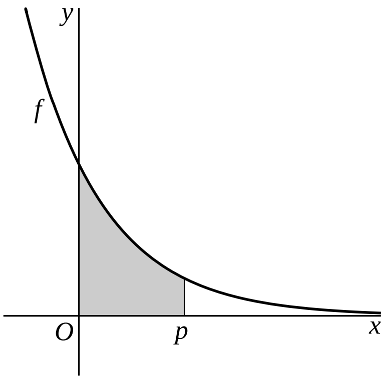
figuur 1



4p **1** Bereken exact de x-coördinaat van B.

In figuur 2 is voor een waarde van p het vlakdeel grijs gemaakt dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn $x = p$, de x-as en de y-as.

figuur 2



5p **2** Toon aan dat de oppervlakte van dit vlakdeel voor elke positieve waarde van p kleiner is dan $\frac{1}{2}$.

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door deze over een afstand a omlaag te schuiven, met $0 < a < 1$. De grafiek van g heeft zowel een snijpunt met de x-as als met de y-as.

6p **3** Bereken voor welke waarde van a deze snijpunten even ver van $O(0, 0)$ liggen.

Looptijden

Een gepensioneerde man bezoekt elke dag zijn hoogbejaarde moeder in een verzorgingstehuis. Daarvoor maakt hij dagelijks een wandeling van 2,1 km. De looptijd T van zijn wandeling is bij benadering normaal verdeeld met verwachtingswaarde 28 minuten en standaardafwijking 2,5 minuten.

Voor de gemiddelde loopsnelheid v tijdens de wandeling geldt $v = \dfrac{2{,}1}{\frac{1}{60}T} = \dfrac{126}{T}$.

Hierbij is T in minuten en v in km/uur.

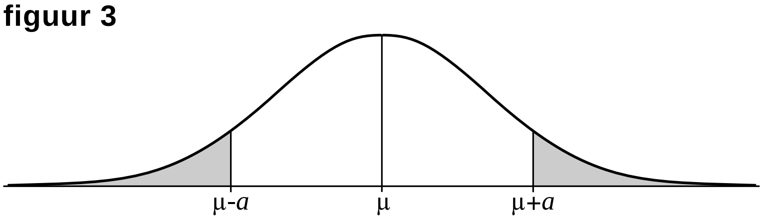
De man maakt de wandeling 7 keer per week.

5p **4** Bereken op hoeveel dagen per week naar verwachting zijn gemiddelde loopsnelheid groter is dan 5,0 km/uur.

We bekijken het volgende vermoeden:
v is normaal verdeeld met verwachtingswaarde $\frac{126}{28} = 4{,}5$ km/uur.

Als een toevalsvariabele X normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ, geldt voor elke waarde van a: $\mathrm{P}(X < \mu - a) = \mathrm{P}(X > \mu + a)$. Zie figuur 3.

figuur 3



Als we een waarde van a kunnen vinden waarvoor $\mathrm{P}(v < 4{,}5 - a)$ niet gelijk is aan $\mathrm{P}(v > 4{,}5 + a)$, dan geldt dat v niet normaal verdeeld is met verwachtingswaarde 4,5.

5p **5** Toon met een berekening aan dat het vermoeden dat v normaal verdeeld is met verwachtingswaarde 4,5 km/uur niet juist is.

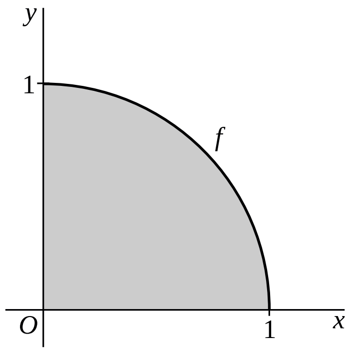
Een zwaartepunt

Van een cirkelschijf met middelpunt (0, 0) en straal 1 is het kwart getekend dat in het eerste kwadrant ligt. De cirkelboog is de grafiek van de functie f die gegeven is door $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ op het domein [0, 1]. Zie figuur 4.

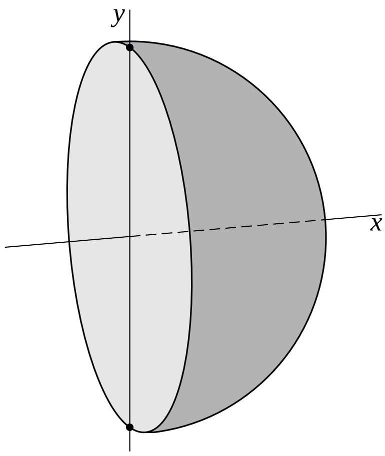
We wentelen het kwart van de cirkelschijf om de x-as. Het omwentelingslichaam dat dan ontstaat is een halve bol. Zie figuur 5.

Het zwaartepunt van de halve bol ligt op de positieve x-as.

figuur 4



figuur 5



Voor de x-coördinaat x_Z van dit zwaartepunt geldt:

$x_Z = \dfrac{M}{V}$, met

$M = \pi \cdot \int_0^1 x \cdot (f(x))^2 \mathrm{d}x$ en

V is de inhoud van de halve bol.

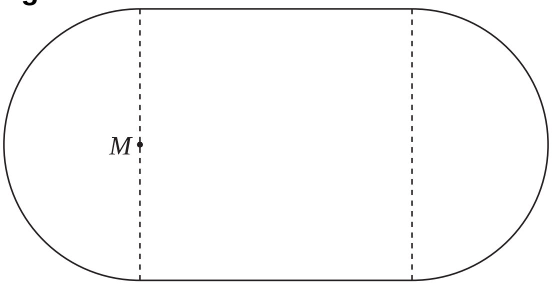
De inhoud van een bol met straal r is gelijk aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.

6p **6** Bereken x_Z exact.

Rechthoek in ovaal

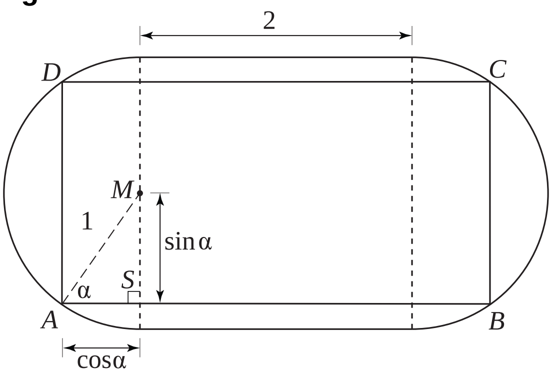
Het ovaal in figuur 6 bestaat uit een vierkant van 2 bij 2 met aan weerszijden een halve cirkel met straal 1. M is het middelpunt van een van de halve cirkels.

figuur 6



In het ovaal wordt een rechthoek $ABCD$ getekend met de hoekpunten op de halve cirkels en met de zijden evenwijdig aan de zijden van het vierkant. $\angle MAB = \alpha$ rad $(0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi)$. Zie figuur 7. Hierin is de rechthoekige driehoek AMS te zien met rechthoekszijden $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$.

figuur 7



De oppervlakte O van rechthoek $ABCD$ kan uitgedrukt worden in α. Er geldt: $O = 2\sin 2\alpha + 4\sin\alpha$.

4p **7** Toon aan dat deze formule juist is.

Er geldt: $\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}\alpha} = 8 \cdot \cos 1\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha$.

4p **8** Toon aan dat de formule voor $\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}\alpha}$ juist is.

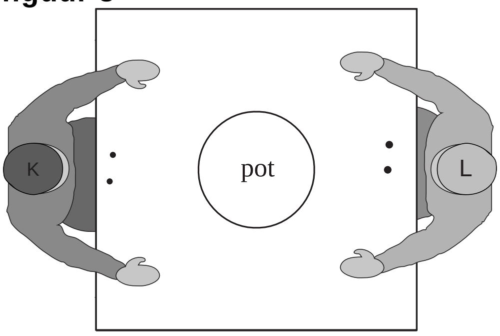
Er is een waarde van α, met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, waarvoor de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ maximaal is.

4p **9** Bereken langs algebraïsche weg de maximale oppervlakte van rechthoek $ABCD$.

Een dobbelspel

De personen K en L spelen een dobbelspel. Elk van de spelers begint met twee fiches; de pot is dan nog leeg. Zie figuur 8.
Bij het spel wordt geworpen met *speciale* dobbelstenen: op vier kanten van zo'n dobbelsteen staat een stip (•), op één kant een A en op één kant een P. Zie foto.

figuur 8



foto

De spelregels zijn:
- De spelers werpen om de beurt met één of twee dobbelstenen.
- De speler die aan de beurt is, werpt met één dobbelsteen als hij één fiche heeft en met twee dobbelstenen als hij twee of meer fiches heeft.
- Voor elke A die een speler werpt, moet hij 1 fiche aan de andere speler geven.
- Voor elke P die een speler werpt, moet hij 1 fiche in de pot doen.
- Voor een stip (•) hoeft hij geen fiche af te geven.
- Wanneer een speler geen fiches meer heeft, heeft hij verloren (en de andere speler gewonnen).

Hiernaast staat een mogelijk spelverloop waarbij speler K is begonnen. In zijn tweede beurt werpt speler K met één dobbelsteen want hij heeft nog maar één fiche.

een spelverloop

aantal fiches van:

	K	L	pot
	2	2	0
K werpt $\boxed{A}\boxed{\bullet}$	1	3	0
L werpt $\boxed{P}\boxed{P}$	1	1	2
K werpt $\boxed{P}$	0	1	3

L heeft gewonnen

Neem aan dat speler K begint.

De kans dat speler K na zijn eerste beurt nog 1 fiche heeft en L dan 3 fiches heeft, is $\frac{2}{9}$.

3p **10** Toon dit aan.

Op een gegeven moment heeft K 2 fiches, L 1 fiche en de pot 1 fiche. Op dit moment is L aan de beurt.

4p **11** Bereken de kans dat, na deze beurt van L, K nog één beurt krijgt en het spel daarna afgelopen is.

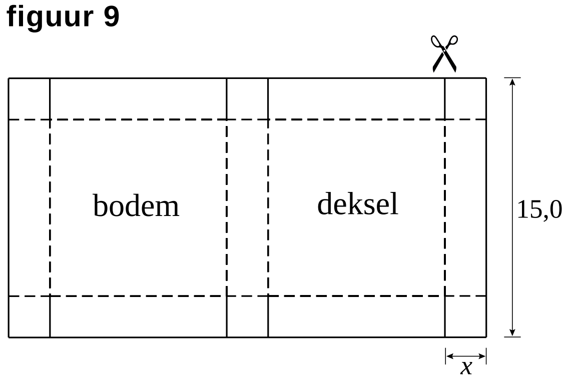
Een toeschouwer heeft het spel met de computer heel vaak gesimuleerd. Op grond van het resultaat beweert hij dat de speler die begint, 43% kans heeft om het spel te winnen en de andere speler 57%.
De spelers K en L spelen het spel tien keer, waarbij speler K steeds begint.
Veronderstel dat de toeschouwer gelijk heeft.

6p **12** Bereken de kans dat een van beide spelers minstens zeven keer wint.

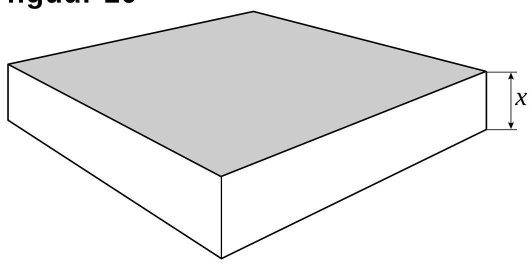
Dozen met vaste inhoud

Uit een lange strook karton met een breedte van 15,0 dm worden dozen gemaakt met vierkante bodem en deksel en rechthoekige zijkanten. Daartoe wordt het karton verknipt in rechthoeken waarvan de breedte gelijk is aan 15,0 dm en de lengte afhangt van de gewenste hoogte van de doos. We noemen de hoogte van de doos in dm x.
Zo'n rechthoekig stuk karton wordt op acht plaatsen x dm ingeknipt, waarna zes vierkantjes van x bij x dm worden omgevouwen. Zie figuur 9. De stippellijnen zijn vouwlijnen. Tot slot wordt het karton gevouwen tot een doos. Zie figuur 10.

figuur 9



figuur 10

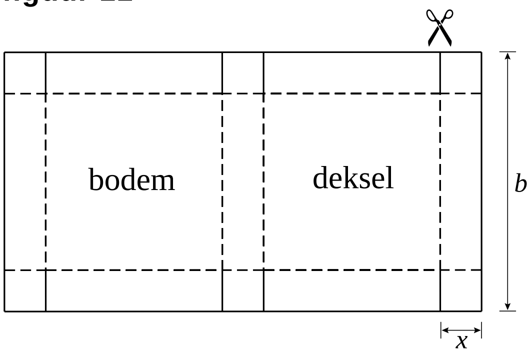


De inhoud van de doos moet 100 dm^3 zijn.

6p **13** Bereken bij welke lengtes van de kartonnen rechthoek dit het geval is. Geef je antwoord in dm, afgerond op 1 decimaal.

Er zijn ook stroken karton te verkrijgen met een andere breedte dan 15,0 dm. De breedte van het stuk karton in dm noemen we b. Zie figuur 11.

figuur 11



We kijken in het vervolg van deze opgave steeds naar dozen waarvoor geldt:
- de bodem en het deksel zijn vierkant,
- de vier zijvlakken zijn rechthoekig,
- de inhoud is 100 dm^3.

Er geldt: $(b-2x)^2 = \dfrac{100}{x}$.

3p **14** Toon aan dat deze formule juist is.

Uit deze formule volgt dat $b = 2x + \dfrac{10}{\sqrt{x}}$.

De oppervlakte A van de kartonnen rechthoek waaruit de doos gemaakt wordt, is afhankelijk van x.

Er geldt: $A = 6x^2 + 70\sqrt{x} + \dfrac{200}{x}$.

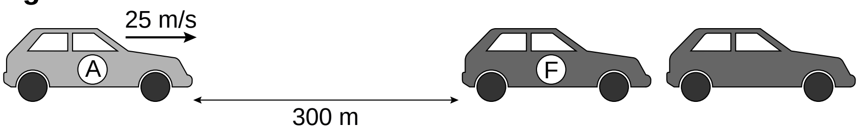
5p **15** Toon aan dat deze formule juist is.

4p **16** Bereken bij welke afmetingen van de kartonnen rechthoek de oppervlakte A minimaal is. Geef de afmetingen in dm, afgerond op 1 decimaal.

File

Op een autoweg bevindt zich een stilstaande file, waarvan F de achterste auto is. Op enige afstand nadert een auto A met een constante snelheid van 25 m/s. Op tijdstip $t = 0$ zet de file zich in beweging. De afstand tussen A en F is dan 300 meter. Zie figuur 12.

figuur 12

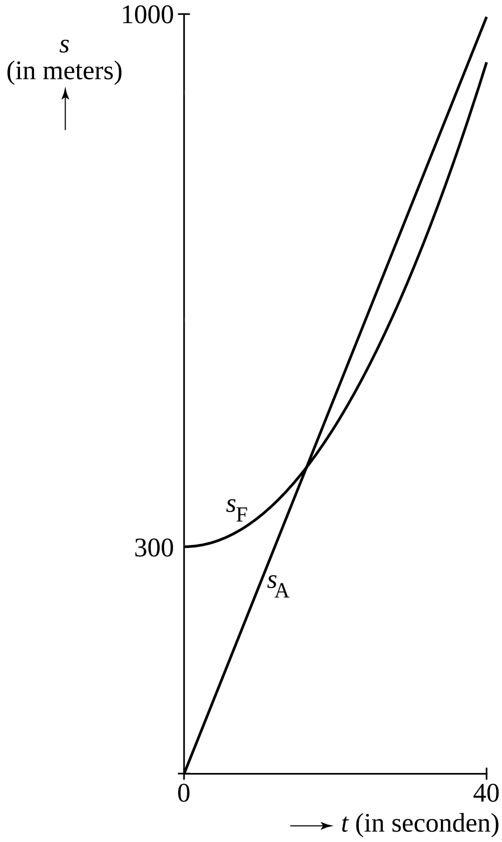


We nemen aan dat auto F met een constante versnelling van 0,80 m/s^2 optrekt.
We bekijken de afstand s (in meters) na t seconden, gemeten vanaf de plaats waar de voorkant van auto A op tijdstip 0 is.
Voor de voorkant van auto A geldt: $s_A(t) = 25t$.

Voor de achterkant van auto F geldt: $s_F(t) = 300 + 0,40t^2$.

In figuur 13 zijn de grafieken van s_A en s_F getekend.

figuur 13



Als auto A niet tijdig afremt, zal hij op een gegeven moment achterop auto F botsen.

6p **17** Bereken met welk snelheidsverschil auto A in dat geval op auto F botst.

Als de afstand tussen A en F op tijdstip $t = 0$ groot genoeg geweest zou zijn, dan had A niet hoeven afremmen om een botsing te vermijden. De grafieken van s_A en s_F hebben in dat geval geen punt gemeenschappelijk.

4p **18** Bereken bij welke afstanden tussen A en F op tijdstip $t = 0$ A niet had hoeven afremmen. Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.