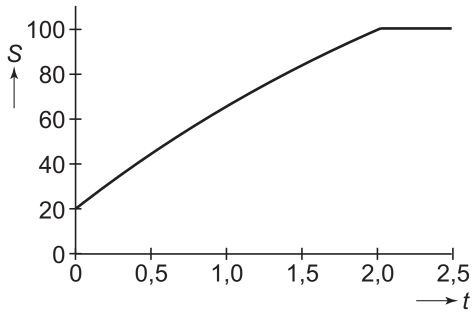
Sauna

Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Dan geldt: $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$.
Hierin is S de temperatuur in de sauna in graden Celsius en t de tijd in uren vanaf 15.00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100 °C. Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden.
In figuur 1 staat de grafiek van S.

figuur 1



4p **1** ☐ Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.

4p **2** ☐ Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de temperatuur in de sauna toeneemt om 16.00 uur. Geef je antwoord in tienden van graden Celsius per minuut.

Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die t uitdrukt in S.

4p **3** ☐ Druk t uit in S.

Bosbouwprojecten

Wereldwijd bestaan bosbouwprojecten waarin geïnvesteerd kan worden. Er wordt elk jaar teakhout aangeplant dat na 20 jaar gekapt wordt. Om beleggers te interesseren wordt van verschillende projecten informatie gepubliceerd over de gemiddelde opbrengst in kubieke meter per hectare.

Bij European Trees is de gemiddelde opbrengst normaal verdeeld met verwachtingswaarde 800 m^3/ha en standaardafwijking 33 m^3/ha.

4p **4** □ Bereken de kans dat bij European Trees de gemiddelde opbrengst meer dan 10% afwijkt van de verwachtingswaarde van 800 m^3/ha.

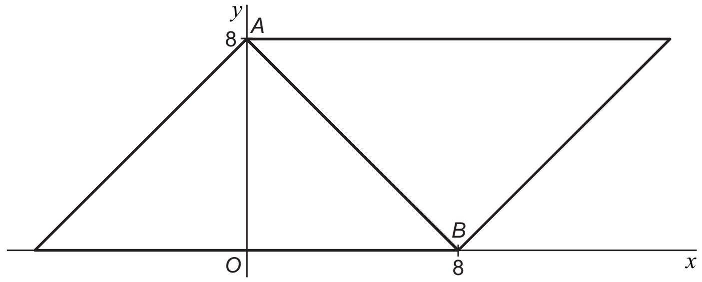
Bij Earthbound is de gemiddelde opbrengst ook normaal verdeeld. De verwachtingswaarde van de gemiddelde opbrengst is 950 m^3/ha. De kans op een gemiddelde opbrengst van minder dan 98% van de verwachtingswaarde is slechts 0,01.

4p **5** □ Bereken de standaardafwijking van de gemiddelde opbrengst voor Earthbound.

Bedekken

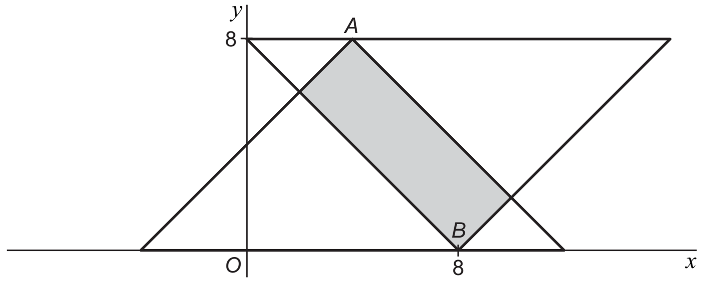
Een geodriehoek is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. We plaatsen twee geodriehoeken met een lange zijde van 16 cm in een rechthoekig assenstelsel met eenheid 1 cm op de manier die in figuur 2 (verkleind) is getekend.
De top A van de linker driehoek heeft de coördinaten (0, 8).
De top B van de rechter driehoek heeft de coördinaten (8, 0).

figuur 2



De linker driehoek begint op tijdstip t = 0 naar rechts te schuiven over de rechter driehoek met een snelheid van 1 cm/s. Daarbij wordt een gedeelte van de rechter driehoek door de linker driehoek bedekt. De tijd t wordt gemeten in seconden.
In figuur 3 is de situatie voor een zeker tijdstip t getekend.
Punt A heeft dan de coördinaten (t, 8). Het bedekte gebied is grijs gekleurd.

figuur 3



De afstand in cm tussen A en B op tijdstip t noemen we $a(t)$.
Er geldt: $a(t) \mid \sqrt{128\,4\,16t\,2\,t^2}$.

3p **6** ☐ Toon dit aan.

Het bedekte gebied op een tijdstip t tussen 0 en 16 is een rechthoek. De oppervlakte in cm^2 van deze rechthoek noemen we $G(t)$. De zijden van de rechthoek zijn ook rechthoekszijden van gelijkbenige rechthoekige driehoeken met lange zijden t en $16\ 4\ t$.

Er geldt: $G(t) \mid\ 4\frac{1}{2}t^2\ 2\ 8t$.

4p **7** ☐ Toon dit aan.

De oppervlakte G van het bedekte gebied neemt eerst toe en later af. De afstand a tussen A en B neemt eerst af en later toe.

5p **8** ☐ Leid met behulp van differentiëren uit de formules voor $G(t)$ en $a(t)$ af dat G en a op hetzelfde tijdstip hun uiterste waarde bereiken.

De oppervlakte G kan ook uitgedrukt worden in a.
Er geldt: $G \mid\ c\,4\,\frac{1}{2}a^2$ waarbij $8\ \Omega a\ \{\ \sqrt{128}$.

4p **9** ☐ Bereken c.

In een vierkant

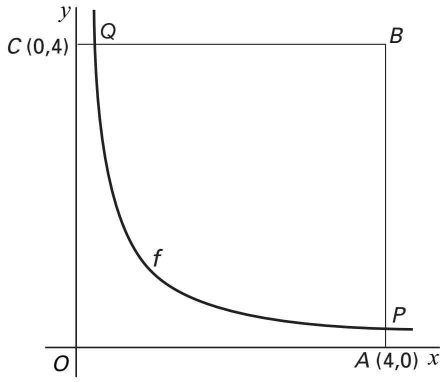
Van een vierkant *OABC* met zijde 4 ligt *A* op de positieve *x*-as en *C* op de positieve *y*-as.

Verder is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.

De grafiek van *f* snijdt de zijde *AB* van het vierkant in het punt *P* en de zijde *BC* in het punt *Q*. Zie figuur 4.
De raaklijn aan de grafiek van *f* in het punt met *x*-coördinaat 2 gaat door het punt *A*.

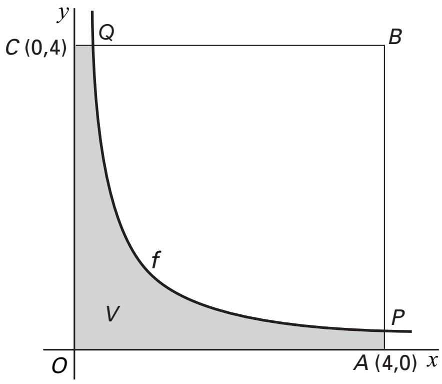
5p **10** ☐ Toon dit aan.

figuur 4



De grafiek van *f* verdeelt het vierkant in twee stukken. Eén van die stukken is in figuur 5 grijs gekleurd; dat stuk noemen we *V*.

figuur 5

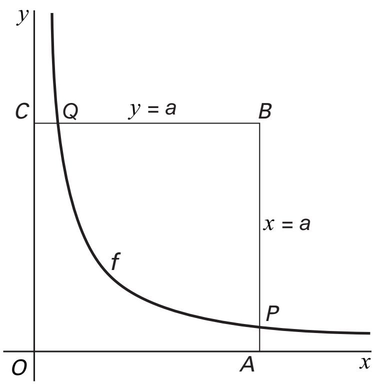


4p **11** ☐ Bereken de *omtrek* van *V* in twee decimalen nauwkeurig.

4p **12** ☐ Toon aan dat de oppervlakte van *V* exact gelijk is aan $1 + 2\ln 4$.

Voor de zijde van het vierkant kan ook een andere waarde dan 4 gekozen worden. Noem de zijde *a*. Zie figuur 6.

figuur 6



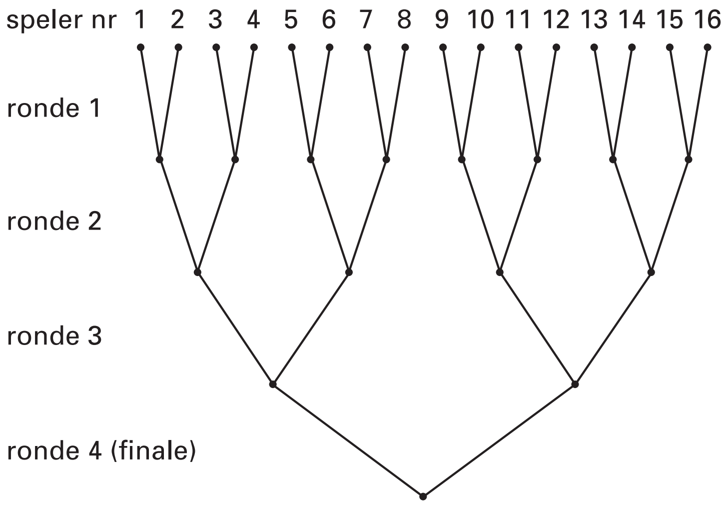
In figuur 6 is *a* zodanig gekozen dat de lijn *AC* niet raakt aan de grafiek van *f*. Er is één waarde van *a* waarvoor *AC* wel raakt aan de grafiek van *f*.

4p **13** ☐ Bereken deze waarde van *a* exact.

Knock-out-systeem

Een spelprogramma op televisie telt bij aanvang 16 deelnemers. Het spel wordt gespeeld in vier rondes. In elke ronde nemen de spelers het in een spelletje van één-tegen-één tegen elkaar op. Van elk tweetal gaat de winnaar door naar de volgende ronde; de verliezer doet niet meer mee. In elke ronde wordt het aantal deelnemers dus gehalveerd; men spreekt van een knock-out-systeem.
De spelletjes zijn van zodanige aard dat de uitslag volledig bepaald wordt door het toeval. Bij elk spelletje hebben beide spelers dus kans $\frac{1}{2}$ om te winnen.
Vooraf wordt een speelschema opgesteld; zie figuur 7.

figuur 7



Elke deelnemer krijgt door loting een nummer. Dit nummer is zijn plaats in het schema. Boven in het schema zie je wie tegen wie speelt in de eerste ronde. Na de eerste ronde zijn er nog acht spelers over. De winnaar van de spelers 1 en 2 speelt in de tweede ronde tegen de winnaar van de spelers 3 en 4, enzovoort. In de vierde ronde wordt de finale gespeeld door de twee overgebleven deelnemers.

Er nemen 8 mannen en 8 vrouwen aan het spelprogramma deel.

3p **14** ☐ Bereken de kans dat de nummers 1 tot en met 4 worden gegeven aan drie mannen en een vrouw.

4p **15** ☐ Bereken de kans dat speler 1 de finale speelt tegen speler 16 en speler 1 deze finale wint.

Een deelnemer speelt 1, 2, 3 of 4 rondes.

4p **16** ☐ Bereken de verwachtingswaarde van het aantal rondes dat een deelnemer speelt.

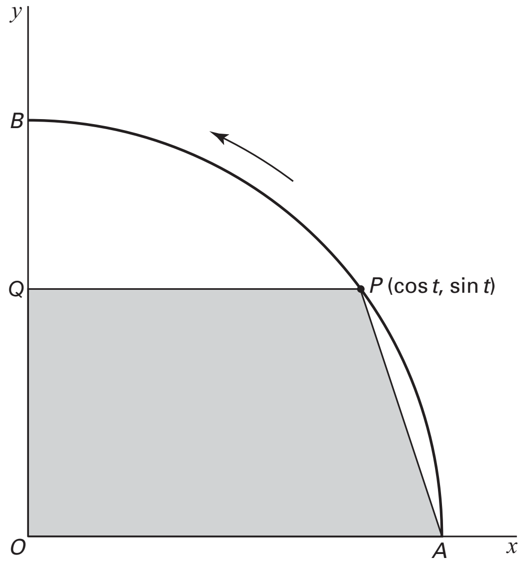
In een jaar is het spelprogramma 52 keer op de televisie geweest. Elke keer hebben er evenveel mannen als vrouwen meegedaan. Er is enige twijfel of elke deelnemer wel evenveel kans heeft om het spelprogramma te winnen. Misschien hebben vrouwen meer kans.
Daarom wordt het aantal keren geteld dat een vrouw het spelprogramma won. Daarna berekent men de kans op dat aantal of een hoger aantal, aangenomen dat alle deelnemers evenveel kans hebben om het spelprogramma te winnen. Het aantal wordt abnormaal hoog gevonden als deze kans kleiner dan 5% is.

5p **17** ☐ Bereken welke aantallen vrouwelijke winnaars abnormaal hoog worden gevonden.

Oppervlakte van een trapezium

In figuur 8 staat een kwart van de eenheidscirkel, met $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$.
Op tijdstip $t = 0$ start een punt P in A en beweegt langs cirkelboog AB; op tijdstip t heeft P de coördinaten $(\cos t, \sin t)$. Q is de loodrechte projectie van P op de y-as.
We bekijken de oppervlakte V van het trapezium $OAPQ$ op tijdstip t, waarbij t in het interval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ ligt.

figuur 8



De oppervlakte V van het trapezium is $\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t$.

4p **18** ☐ Toon dit aan.

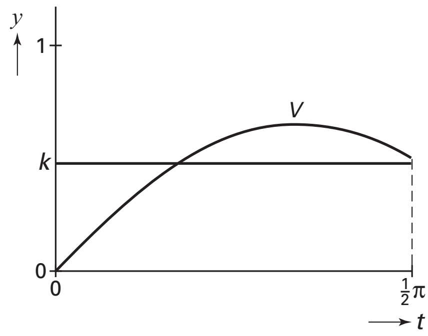
De waarde die V op tijdstip $\frac{1}{4}\pi$ heeft, wordt ook op een ander tijdstip aangenomen.

3p **19** ☐ Bereken dit andere tijdstip in twee decimalen nauwkeurig.

5p **20** ☐ Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van t de oppervlakte V maximaal is.

De oppervlakte van het trapezium $OAPQ$ verandert op het tijdsinterval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ voortdurend. In figuur 9 is de grafiek getekend van V als functie van t op dit tijdsinterval.
De gemiddelde oppervlakte van het trapezium $OAPQ$ over het tijdsinterval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ noemen we k. In figuur 9 is de lijn $y = k$ getekend.
Er geldt: de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van V, de t-as en de lijn $t = \frac{1}{2}\pi$ is gelijk aan de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de horizontale lijn $y = k$, de t-as, de y-as en de lijn $t = \frac{1}{2}\pi$.

figuur 9



6p **21** ☐ Bereken met behulp van integreren de exacte waarde van k.