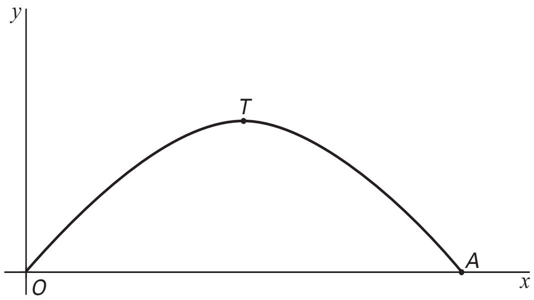
Eindexamen wiskunde B1 vwo 2005-II

Twee benaderingen van sin *x*

Met domein $[0, \pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin x$.
De grafiek van f snijdt de x-as in O en A en heeft als top T. Zie figuur 1.

figuur 1



Gegeven is verder de tweedegraadsfunctie $g(x) = ax(x - \pi)$, eveneens met domein $[0, \pi]$.

In de vragen 1 en 2 nemen we $a = \frac{-4}{\pi^2}$. De grafieken van f en g lijken dan op elkaar.

3p **1** ☐ Toon aan dat ook de grafiek van g door O, A en T gaat.

In O is de helling van de grafiek van g groter dan de helling van de grafiek van f .

5p **2** ☐ Toon dit aan met behulp van differentiëren.

Een andere benadering voor de grafiek van f krijgen we als we a zodanig kiezen dat geldt:

$$\int_0^{\pi} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0 \ .$$

7p **3** ☐ Bereken in dit geval de exacte waarde van a.

Eén, twee of drie keer testen

Bij een experiment doen proefpersonen een test. Zodra de test succesvol is, is de proefpersoon klaar. Als de eerste test niet succesvol is, doet de proefpersoon een tweede test; als die tweede test ook niet succesvol is, doet de proefpersoon een derde test. Een proefpersoon doet hoogstens drie keer een test.
We nemen aan dat elke keer dat de test wordt gedaan de kans op succes 0,3 is, onafhankelijk van eventuele vorige testen.

De verwachtingswaarde van het aantal keren dat een proefpersoon de test doet, is 2,19.

4p **4** ☐ Toon dit aan.

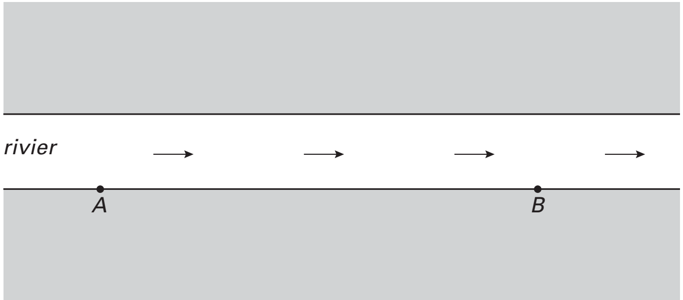
Voor het experiment is € 10 000 beschikbaar. Men betaalt elke proefpersoon € 100 voor zijn deelname aan het experiment. De kosten per test bedragen € 50.
Men wil zo veel mogelijk proefpersonen laten meedoen.

4p **5** ☐ Bereken hoeveel proefpersonen men naar verwachting aan dit experiment kan laten deelnemen.

5p **6** ☐ Bereken de kans dat van tien proefpersonen meer dan de helft na drie keer testen nog geen succes heeft.

Reistijd

figuur 2



Een boot vaart op een rivier van A naar B en terug. De afstand tussen A en B is 10 km. De boot vaart altijd met een snelheid van 20 km/u ten opzichte van het water. De rivier stroomt in de richting van A naar B. Zie figuur 2.

Tijdens de reis van de boot van A naar B en terug is de stroomsnelheid van de rivier constant. We noemen de stroomsnelheid v (in km/u).
Een voorbeeld: als $v = 5$, dan vaart de boot op de heenreis met een snelheid van 25 km/u ten opzichte van de oever en op de terugreis met een snelheid van 15 km/u ten opzichte van de oever.
De totale reistijd T van een retourtocht wordt gegeven door:

$$T = \frac{10}{20+v} + \frac{10}{20-v}$$

Hierbij is T in uren en v in km/u met $0 < v < 20$.

3p **7** ☐ Toon aan dat deze formule juist is.

3p **8** ☐ Bereken bij welke waarde van v de totale reistijd van een retourtocht 2 uur is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Als de stroomsnelheid van de rivier groter wordt, neemt de totale reistijd van een retourtocht toe.

6p **9** ☐ Toon dit aan met behulp van de formule van de afgeleide functie van T.

Veronderstel dat v varieert tussen 0 en 10 km/u en dat alle waarden van 0 tot en met 10 even vaak voorkomen. De gemiddelde reistijd kun je dan benaderen door T uit te rekenen voor $v = 0, v = \frac{1}{10}, v = \frac{2}{10}, v = \frac{3}{10},$ enzovoort tot en met $v = 10$ en van de reistijden het gemiddelde te nemen.

5p **10** ☐ Bereken de gemiddelde reistijd met deze benaderingswijze; geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Je kunt de gemiddelde reistijd ook uitrekenen met een integraal.

6p **11** ☐ Toon langs algebraïsche weg aan dat de gemiddelde reistijd gelijk is aan $\ln 3$ uur.

Maximumsnelheid

De snelheidsmeter van een auto geeft meestal niet precies aan wat de werkelijke snelheid is waarmee de auto rijdt. Voor een bepaald type snelheidsmeter geldt het volgende: als de snelheidsmeter een snelheid van v km/u aangeeft, is de waarde van de werkelijke snelheid normaal verdeeld, waarbij het gemiddelde gelijk is aan v en de standaardafwijking gelijk is aan 1,5% van dat gemiddelde.

Bij snelheidscontroles wordt een marge aangehouden van 3%. Dus bijvoorbeeld bij een maximumsnelheid van 100 km/u wordt er beboet bij snelheden van 103 km/u en hoger.

Van een auto is de snelheidsmeter van bovenstaand type. De bestuurder rijdt volgens de meter steeds met precies de toegestane maximumsnelheid.

Stel dat de toegestane maximumsnelheid 70 km/u is. De kans dat de werkelijke snelheid van de bestuurder zo groot is dat hij voor een boete in aanmerking komt, is dan, afgerond op drie decimalen, gelijk aan 0,023.

4p **12** □ Toon dit aan.

De kans dat hij in aanmerking komt voor een boete is voor elke toegestane maximumsnelheid even groot.

4p **13** □ Toon dit aan.

De bestuurder passeert in een jaar 200 keer een elektronisch bord dat waarschuwt wanneer men te hard rijdt, dat wil zeggen wanneer men de boetegrens overschrijdt. De kans dat de bestuurder voor een boete in aanmerking komt, is telkens 0,023.

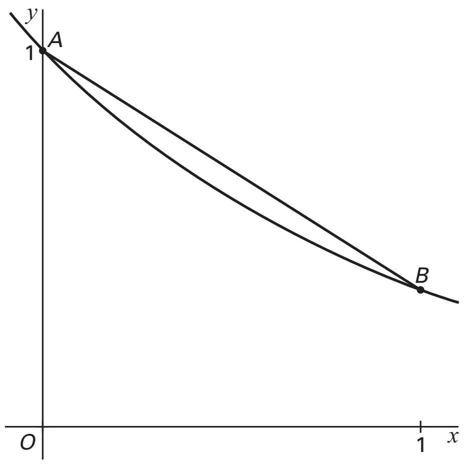
4p **14** □ Bereken de kans dat de bestuurder van die 200 keer meer dan 2 keer gewaarschuwd wordt.

Eindexamen wiskunde B1 vwo 2005-II

Exponentiële functie

Gegeven is de functie $f(x) = e^{-x}$. Op de grafiek van f liggen de punten A en B met x-coördinaten $x_A = 0$ en $x_B = 1$. Zie figuur 3.

figuur 3



Het vlakdeel begrensd door het lijnstuk AB en de grafiek van f noemen we V.

6p **15** ☐ Bereken de oppervlakte van V.

Op de grafiek van f ligt een punt C waarin de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig is aan het lijnstuk AB.

5p **16** ☐ Bereken de x-coördinaat van C. Rond af op twee decimalen.

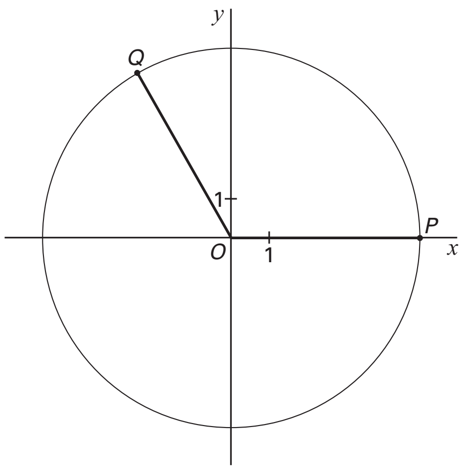
Achtervolging

Op tijdstip $t = 0$ beginnen de punten P en Q met een eenparige cirkelbeweging.
De bewegingsvergelijkingen zijn

voor $P: \begin{cases} x(t) = 5\cos\left(\frac{11}{10}t\right) \\ y(t) = 5\sin\left(\frac{11}{10}t\right) \end{cases}$ en voor $Q: \begin{cases} x(t) = 5\cos\left(t + \frac{2}{3}\pi\right) \\ y(t) = 5\sin\left(t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$

Hierbij is t in seconden en zijn $x(t)$ en $y(t)$ in centimeters.
In figuur 4 staat de beginsituatie op schaal getekend. Deze figuur is ook op ware grootte afgedrukt op de uitwerkbijlage.

figuur 4



Tijdens de beweging wordt Q telkens door P ingehaald.

4p **17** ☐ Bereken na hoeveel seconden Q voor het eerst door P wordt ingehaald.

Op een bepaald tijdstip heeft P over de cirkel een afstand van 20 cm afgelegd.

3p **18** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de plaats van P op dit tijdstip. Licht je werkwijze toe.

Het punt M is het midden van lijnstuk PQ. De coördinaten van M zijn $\left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}\right)$.

De bewegingsvergelijkingen van M zijn van de vorm $\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \cdot \cos(at + b) \\ y(t) = \varphi(t) \cdot \sin(at + b) \end{cases}$

5p **19** ☐ Geef een formule voor φ uitgedrukt in t. Licht je antwoord toe.

Uitwerkbijlage bij vraag 18

Vraag 18