

Zeemonsters

In 1972 werd de mesoplodon densirostris ontdekt in de oceaan. Het is een dolfijnensoort die 7 meter lang kan worden. Mede naar aanleiding van deze vondst deed de bioloog C. Paxton onderzoek naar de vraag hoeveel van dergelijke grote diersoorten er in de toekomst nog meer ontdekt zullen worden. Paxton beperkte zich tot wat hij zeemonsters noemde: dieren die in zee leven en meer dan 2 meter lang kunnen worden.

foto



Een mesoplodon densirostris

Op basis van gegevens over het aantal ontdekte zeemonsters in verschillende jaren stelde Paxton het volgende model op:

$$P(t) = \frac{264t - 476657}{t - 1767}$$

Met dit model kon hij een schatting maken van het aantal ontdekte soorten tot en met een zeker jaar t . In deze formule is $P(t)$ het aantal soorten dat tot en met jaar t bekend is. Dus als je een schatting wilt van het aantal soorten dat bijvoorbeeld op het eind van het jaar 1980 bekend is, dan moet je $t = 1980$ invullen in de formule. De uitkomst wordt afgerond op gehelen.

- 3p 1 Vanaf eind 1895 tot en met eind 1995 zijn er in werkelijkheid 30 soorten ontdekt. Bereken hoeveel soorten er volgens het model van Paxton zouden zijn ontdekt in deze periode.

Zo nu en dan wordt er een nieuwe soort ontdekt. Dat betekent dat het aantal bekende soorten toeneemt. Het model van Paxton moet dus een grafiek opleveren die altijd stijgt. Dit kunnen we controleren met behulp van de afgeleide van $P(t)$.

- 4p 2 Stel de formule op voor de afgeleide van $P(t)$ en toon met behulp daarvan aan dat de grafiek van $P(t)$ altijd stijgt.

J. Groot schreef in 2003 een artikel in het wiskundeblad Pythagoras over het model van Paxton. Daarin schreef hij dat hij met dezelfde gegevens een ander model had gevonden. Zijn model zag er als volgt uit:

$$G(t) = 218 \cdot (1 - 0,9799^{t-1798})$$

In deze formule is $G(t)$ het aantal soorten dat tot en met jaar t bekend is. Ook hier wordt de uitkomst afgerond op gehelen.

De twee formules hierboven zijn verschillend, dus je mag verwachten dat beide modellen niet altijd dezelfde uitkomsten opleveren. Voor $t = 1931$ bijvoorbeeld geeft het model van Paxton 202 soorten en het model van Groot 203. Vanwege de afronding op gehelen is er een aantal jaren waarvoor de twee modellen wél dezelfde uitkomst geven. Onder andere is dat het geval bij $t = 1938$: beide modellen leveren dan elk 205 bekende soorten. Er zijn nog meer jaren uit de periode 1930 tot en met 1945 waarvoor beide modellen dezelfde uitkomst geven.

4p **3** Onderzoek welke jaren dat zijn.

Paxton en Groot ontwikkelden hun modellen vooral om een schatting te kunnen maken van het aantal soorten zeemonsters dat men in de toekomst nog zou kunnen ontdekken. Elk van deze beide modellen voorspelt dan ook dat het aantal soorten zeemonsters een grenswaarde heeft.

Volgens het model van Paxton zullen er na 2009 nog 42 soorten zeemonsters ontdekt worden.

4p **4** Bereken hoeveel soorten zeemonsters er na 2009 nog ontdekt zullen worden volgens het model van Groot.

Behalve de formules van Paxton en Groot zijn er nog meer formules denkbaar die de werkelijke aantallen bekende soorten zeemonsters goed benaderen. Een mogelijkheid is bijvoorbeeld een formule van de vorm $F(t) = \sqrt{at + b}$. In deze formule is $F(t)$ het aantal soorten tot en met jaar t . De waarden voor a en b worden zo gekozen dat het model precies overeenkomt met de werkelijke aantallen soorten zoals die eind 1895 en eind 1995 bekend waren. Eind 1895 waren er in werkelijkheid 187 soorten zeemonsters bekend. Eind 1995 waren dat er 217.

6p **5** Bereken de waarden van a en b .