

## Emissierechten

---

Om de uitstoot van kooldioxide (CO<sub>2</sub>) onder controle te krijgen verdeelt de overheid elk jaar zogenoemde emissierechten onder bedrijven die CO<sub>2</sub> uitstoten. Eén **emissierecht** betekent dat een bedrijf het recht heeft om in een jaar één ton CO<sub>2</sub> uit te stoten.

Wanneer een bedrijf meer emissierechten heeft dan het aan CO<sub>2</sub> uitstoot, kan het de overgebleven rechten verkopen aan een bedrijf dat nog emissierechten nodig heeft. Deze handel in emissierechten vindt plaats op de Amsterdamse klimaatbeurs ECX.

Aan de hand van een voorbeeld gaan we in de rest van deze opgave na wat de handel in emissierechten voor een bedrijf kan betekenen.

Het bedrijf Fychem stoot per jaar 100 000 ton CO<sub>2</sub> uit en beschikt over slechts 95 000 emissierechten. We onderzoeken de volgende twee mogelijkheden:

- mogelijkheid 1: het bedrijf koopt er 5000 emissierechten bij;
- mogelijkheid 2: het bedrijf neemt maatregelen om de uitstoot tot 90 000 ton CO<sub>2</sub> terug te brengen. Dit kost het bedrijf 60 000 euro. Het bedrijf houdt nu 5000 emissierechten over en verkoopt die op de beurs.

We gaan ervan uit dat de koopprijs en de verkoopprijs van een emissierecht even groot zijn en noemen dat de **prijs** van een emissierecht. Afhankelijk van de prijs van een emissierecht kun je uitrekenen welke van de twee mogelijkheden het voordeligst is voor Fychem.

Neem aan dat de prijs van een emissierecht gelijk is aan 10 euro.

- 3p    1    Onderzoek welke mogelijkheid voor Fychem het voordeligst is.

De prijs van een emissierecht op de klimaatbeurs varieert. Bij een andere prijs dan 10 euro moet opnieuw bekeken worden welke van de twee mogelijkheden het voordeligst is voor Fychem. Er is een prijs waarbij het voor Fychem niet uitmaakt welke van de twee genoemde mogelijkheden wordt gekozen.

- 4p    2    Bereken in dat geval de prijs van een emissierecht.

De kosten om de uitstoot van CO<sub>2</sub> te verminderen hangen af van de hoeveelheid waarmee de uitstoot wordt verminderd. Voor Fychem geldt de volgende formule:

$$K(x) = \frac{540x}{100000 - x}$$

In deze formule stelt  $K$  de kosten voor in duizenden euro's en  $x$  het aantal ton waarmee de CO<sub>2</sub>-uitstoot wordt verminderd.

Hoe meer Fychem de uitstoot van CO<sub>2</sub> vermindert, des te meer kosten zal het bedrijf hiervoor moeten maken.

- 4p    3    Beredeneer dit met behulp van differentiëren.

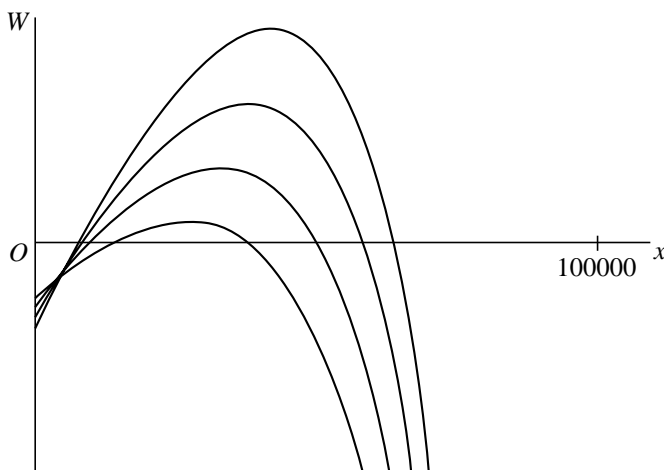
Wanneer Fychem veel investeert in het verminderen van de uitstoot van CO<sub>2</sub>, kan het bedrijf de overtollige emissierechten verkopen op de klimaatbeurs. Voor de winst die Fychem zo kan behalen geldt de formule:

$$W = 0,001 \cdot p \cdot (x - 5000) - \frac{540x}{100000 - x}$$

In deze formule is  $W$  de winst van Fychem in duizenden euro's,  $p$  de prijs van een emissierecht in euro's en  $x$  het aantal ton waarmee de CO<sub>2</sub>-uitstoot van Fychem wordt verminderd.

In figuur 1 is voor enkele waarden van  $p$  het verband tussen  $W$  en  $x$  grafisch weergegeven.

**figuur 1**



Alle grafieken gaan door één punt, dus in dat punt is de winst onafhankelijk van  $p$ . In dat punt geldt: voor het bijbehorende aantal ton waarmee de CO<sub>2</sub>-uitstoot wordt verminderd, maakt Fychem altijd hetzelfde verlies.

- 4p **4** Bereken hoeveel euro dit verlies bedraagt.

Fychem besluit maatregelen te nemen om de uitstoot van CO<sub>2</sub> te verminderen met 18 000 ton. Bij een prijs van bijvoorbeeld 14 euro voor een emissierecht maakt het bedrijf met dit besluit winst.

Er zijn prijzen van een emissierecht waarvoor Fychem verlies maakt als het bedrijf de CO<sub>2</sub>-uitstoot met 18 000 ton vermindert.

- 4p **5** Bereken bij welke prijzen van een emissierecht dit het geval is. Geef je antwoord in centen nauwkeurig.

## Nominaal volume

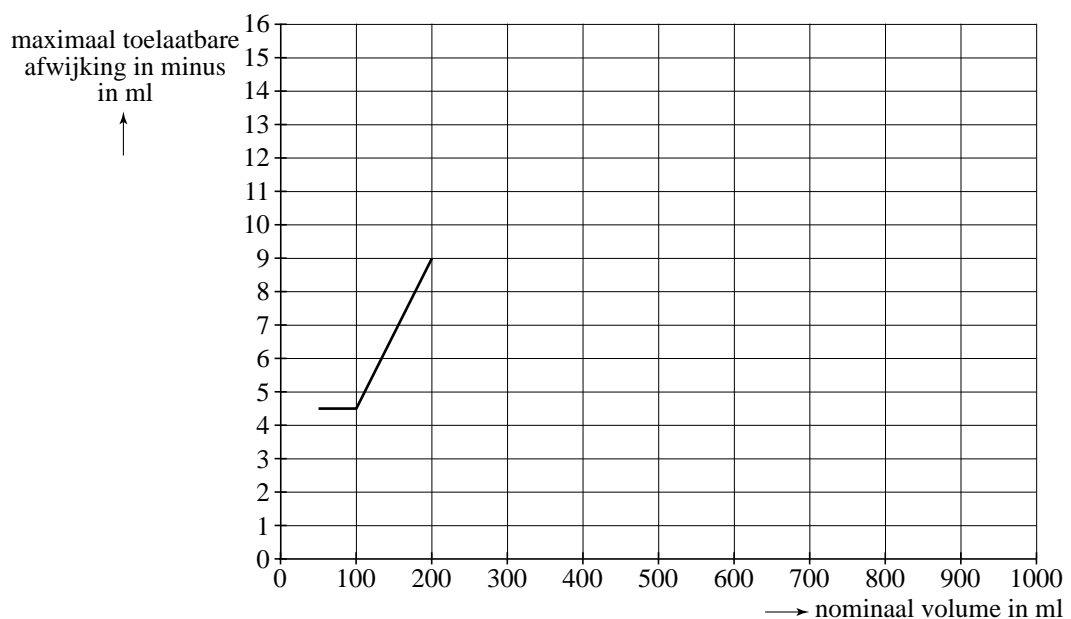
Veel vloeistoffen worden verhandeld in flessen. De hoeveelheid vloeistof die volgens het etiket in de fles moet zitten, heet het **nominaal volume**. Als er bijvoorbeeld “400 ml e” op staat, dan is het nominaal volume 400 ml. Dat betekent niet dat er dan ook altijd precies 400 ml vloeistof in zit. De werkelijke hoeveelheid vloeistof in de fles zou bijvoorbeeld 401,8 ml kunnen zijn of 399,6 ml. Als de werkelijke hoeveelheid vloeistof minder is dan het nominaal volume, dan spreken we van een **afwijking in minus**. De afwijking in minus mag niet te groot zijn. Daar zijn Europese richtlijnen voor. In tabel 1 is voor volumes tussen 50 ml en 1000 ml de maximaal toelaatbare afwijking in minus weergegeven volgens de Europese richtlijn.

tabel 1

nominaal volume in ml	max. toelaatbare afwijking in minus	
	in % van het nominaal volume	in ml
50 tot 100	-	4,5
100 tot 200	4,5	-
200 tot 300	-	9
300 tot 500	3	-
500 tot 1000	-	15

Aan de hand van tabel 1 kan een grafiek worden gemaakt van het verband tussen het nominaal volume en de maximaal toelaatbare afwijking in minus. In figuur 1 is daar al een begin mee gemaakt.

figuur 1



De grafiek in figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

4p **6** Maak de grafiek af op de uitwerkbijlage.

Flessen heten **ondeugdelijk** als de afwijking in minus groter is dan de maximaal toelaatbare afwijking in minus.

Een firma produceert hoestsiroop. Volgens het etiket bevat een fles hoestsiroop 400 ml, dus het nominaal volume is 400 ml. De maximaal toelaatbare afwijking in minus is dan 12 ml.

De werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles is normaal verdeeld met een gemiddelde van 405 ml. Uit onderzoek is gebleken dat per 1000 flessen hoestsiroop gemiddeld 5,2 flessen ondeugdelijk zijn. Met behulp van deze gegevens kan worden berekend dat de standaardafwijking van de werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles ongeveer gelijk is aan 6,6 ml.

- 5p 7 Bereken de standaardafwijking van de werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles in twee decimalen nauwkeurig.

- 4p 8 De firma levert een partij van 5000 flessen hoestsiroop aan een apotheek. Bereken het verwachte aantal flessen in deze partij dat een afwijking in minus heeft.

De overheid controleert regelmatig partijen flessen om te zien of er niet te veel ondeugdelijke flessen tussen zitten. In tabel 2 staan de Europese richtlijnen voor zulke controles.

**tabel 2**

<b>grootte van de partij (aantal flessen)</b>	<b>grootte van de steekproef</b>	<b>goedkeur- criterium</b>	<b>afkeur- criterium</b>
100 t/m 150	20	$\leq 1$	$\geq 2$
151 t/m 280	32	$\leq 2$	$\geq 3$
281 t/m 500	50	$\leq 3$	$\geq 4$
501 t/m 1200	80	$\leq 5$	$\geq 6$
1201 t/m 3200	125	$\leq 7$	$\geq 8$
3201 en meer	200	$\leq 10$	$\geq 11$

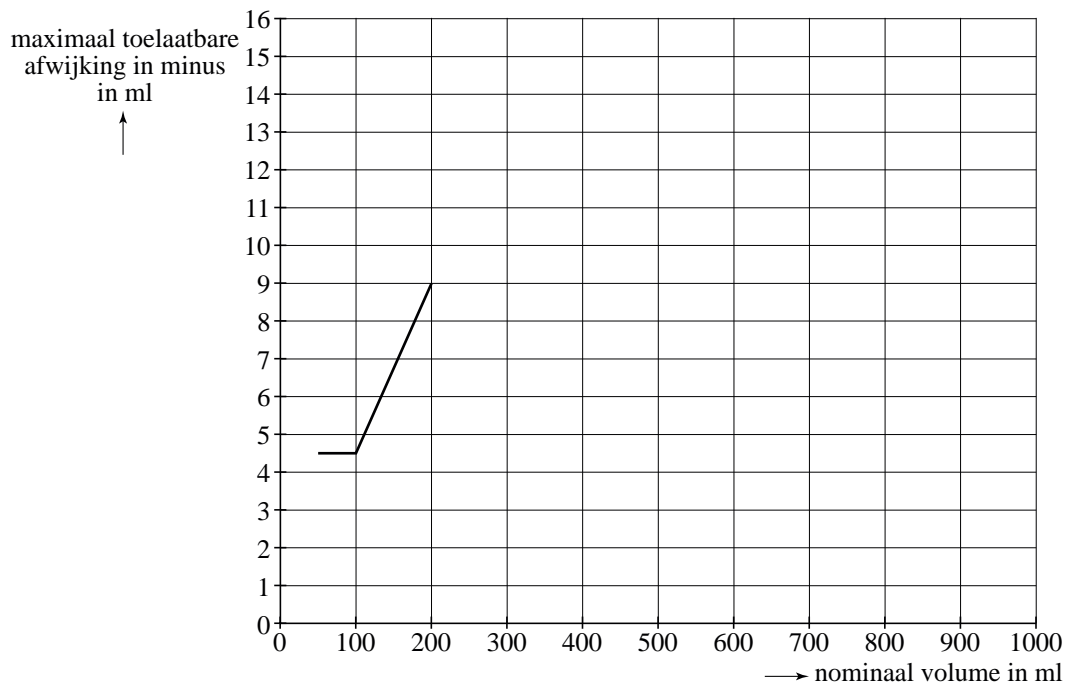
In tabel 2 zien we dat voor een partij van bijvoorbeeld 200 flessen er een steekproef van 32 flessen genomen moet worden. Deze partij wordt goedgekeurd als er in de steekproef niet meer dan 2 flessen ondeugdelijk zijn en afgekeurd bij 3 of meer ondeugdelijke flessen.

Door problemen met de productie is gedurende een periode 6% van de flessen ondeugdelijk. Tijdens deze periode wordt een partij van 5000 flessen gecontroleerd volgens de richtlijnen in tabel 2. De firma hoopt natuurlijk dat de partij wordt goedgekeurd.

- 4p 9 Bereken de kans dat dit gebeurt.

uitwerkbijlage

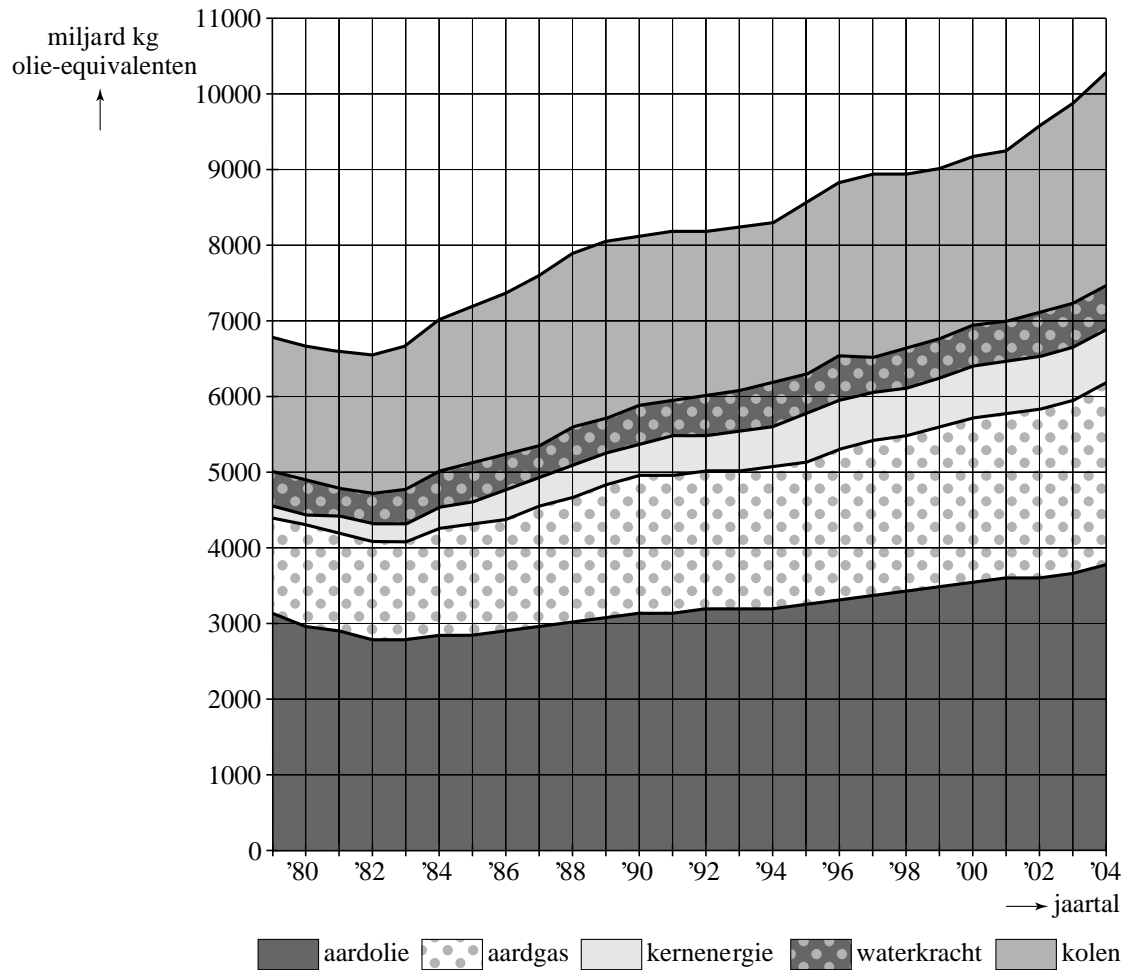
6



## Energiebronnen

In figuur 1 zie je een grafiek van de hoeveelheid energie die we tussen 1979 en 2004 op aarde hebben verbruikt in de vorm van aardolie, aardgas, kernenergie, waterkrachtenergie en kolen. Hierin is voor elke energiebron de energie van een miljard kilo aardolie als eenheid gebruikt, zie de verticale as in figuur 1.

figuur 1



In de grafiek kun je bijvoorbeeld aflezen dat in 1991 deze 5 energiebronnen goed waren voor ongeveer 8200 miljard kg olie-equivalenten en dat het aandeel aardgas daarin ongeveer 22% was.

- 4p **10** Onderzoek of het aandeel aardgas in 2004 groter of kleiner was dan in 1980. Licht je werkwijze toe.

In de rest van de opgave kijken we alleen naar de productie van aardolie. Deze productie wordt uitgedrukt in vaten (een vat staat voor ongeveer 159 liter).

In de periode 1950 tot en met 1974 groeide de jaarlijkse olieproductie exponentieel van ongeveer 4 miljard vaten in 1950 tot ongeveer 22 miljard vaten in 1974. In 1990 was de olieproductie ongeveer 24 miljard vaten. Dat zou veel meer zijn geweest als de olieproductie na 1974 in dezelfde mate exponentieel was doorgegroeid als in de periode 1950-1974.

- 5p **11** Bereken hoe groot de olieproductie in 1990 dan zou zijn geweest.

In de periode 1984 tot en met 2004 is de olieproductie jaarlijks met 0,4 miljard vaten gestegen, van 21 miljard vaten in 1984 tot 29 miljard vaten in 2004. We gaan ervan uit dat de olieproductie in de jaren na 2004 ook met 0,4 miljard vaten per jaar blijft toenemen.

Dan geldt voor de totale hoeveelheid olie  $s(t)$  (in miljarden vaten) die we vanaf 2004 tot en met  $t$  jaar na 2004 uit de grond halen, het volgende:

$$s(t) = 29 + (29 + 0,4) + (29 + 2 \cdot 0,4) + (29 + 3 \cdot 0,4) + \dots + (29 + t \cdot 0,4)$$

- 4p **12** Toon aan dat dit te schrijven is als  $s(t) = 0,2t^2 + 29,2t + 29$ .

In werkelijkheid zal de jaarlijkse olieproductie niet blijven stijgen, maar na verloop van tijd een maximum bereiken en vervolgens weer afnemen.

Oliemaatschappijen maken hier modellen voor. Volgens een dergelijk model verloopt de jaarlijkse olieproductie vanaf 2004 als volgt:

$$Y = \frac{188,0 \cdot 0,961^t}{(1 + 1,55 \cdot 0,961^t)^2}$$

Hierin is  $Y$  de jaarlijkse olieproductie in miljarden vaten en  $t$  het jaar van de productie, met  $t = 0$  in 2004. Volgens dit model bereikt de olieproductie een maximum van ruim 30 miljard vaten in 2015 om daarna weer te dalen.

- 4p **13** Bereken in welk jaar na 2015 de olieproductie voor het eerst gedaald zal zijn tot onder de 20 miljard vaten per jaar.

Het aantal miljarden vaten olie dat de mens vanaf het begin van de oliewinning tot en met jaar  $t$  in totaal uit de grond heeft gehaald noemen we de totale olieproductie  $T$ . Hierbij is weer  $t = 0$  in 2004. De jaarlijkse olieproductie  $Y$  is gelijk aan de jaarlijkse verandering van  $T$ . Daarom geldt bij benadering het volgende verband:

$$\frac{dT}{dt} = Y$$

Dit betekent dat  $T$  bij benadering geschreven kan worden als:

$$T = 3049 \cdot (1 + 1,55 \cdot 0,961^t)^{-1}$$

- 4p **14** Toon met behulp van differentiëren aan dat  $\frac{dT}{dt}$  inderdaad bij benadering gelijk is aan  $Y$ .

---

## Euroverspreiding

---

Op 1 januari 2002 werd in Nederland en in een aantal andere Europese landen een nieuwe munteenheid ingevoerd, de euro. Elk van deze landen heeft eigen, herkenbare munten; zo staat op de Nederlandse munten het portret van de Nederlandse koningin.

Doordat de euro in meerdere landen wordt gebruikt, raken de munten van een land verspreid over andere landen. In 2002 is door wiskundigen een experiment uitgevoerd om deze verspreiding te onderzoeken. Aan dit experiment deden duizenden mensen in binnen- en buitenland mee, de zogenoemde eurometers. Aan het begin van elke maand werd geteld hoeveel munten uit welk euroland ze in bezit hadden.

De onderzoekers slaagden erin kansen te bepalen dat een Nederlandse munt de grens overgaat: de kans dat een Nederlandse munt die in Nederland is, de volgende maand in het buitenland is, is 0,03. De kans dat een Nederlandse munt die in het buitenland is, daar de volgende maand blijft, is 0,9985. Deze kansen staan ook in tabel 1. We gaan er in deze opgave van uit dat deze kansen elke maand hetzelfde blijven.

**tabel 1**

	maand $t$ in Nederland	maand $t$ in buitenland
maand $t + 1$ in Nederland	0,97	0,0015
maand $t + 1$ in buitenland	0,03	0,9985

Een Nederlandse munt is op 1 februari 2002 in Nederland. Met behulp van tabel 1 kun je de kans berekenen dat deze munt op 1 mei 2002 in Nederland is, al dan niet na een verblijf in het buitenland.

5p **15** Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.



Op basis van de kansen in tabel 1 is voor de totale hoeveelheid Nederlandse munten een model te maken dat voor elk tijdstip voorspelt hoeveel van deze munten in Nederland zijn en hoeveel in het buitenland. Dit model bestaat uit twee recurrente betrekkingen<sup>1</sup>:

$$N_t = 0,97N_{t-1} + 0,0015B_{t-1} \text{ en } B_t = 0,03N_{t-1} + 0,9985B_{t-1}$$

Hierin is  $N_t$  het aantal Nederlandse munten in miljarden dat in maand  $t$  in Nederland is;  $B_t$  is het aantal Nederlandse munten in miljarden in maand  $t$  in het buitenland. Verder is  $t$  de tijd in maanden met  $t = 0$  op 1 januari 2002.

Veronderstel dat in totaal 2,8 miljard Nederlandse munten gemaakt zijn, die op 1 januari 2002 allemaal in Nederland waren. Ga ervan uit dat er daarna geen nieuwe munten zijn bijgemaakt. Volgens bovenstaand model zal het aantal Nederlandse munten in Nederland op de lange duur stabiliseren.

- 4p **16** Bereken hoeveel Nederlandse munten er uiteindelijk in Nederland zullen zijn en hoeveel in het buitenland. Geef je antwoord in miljoenen nauwkeurig.

Van alle muntstukken die op zeker moment in Nederland in omloop zijn, is 23,3% Duits. Het vermoeden bestaat dat in de grensstreek met Duitsland het percentage Duitse muntstukken hoger is dan in Nederland als geheel. Om dit vermoeden te onderzoeken, worden van een aantal mensen die in de grensstreek wonen gegevens verzameld over de munten in ieders portemonnee. Er blijken in totaal 512 muntstukken in deze portemonnees te zitten, waarvan er 138 Duits zijn.

- 6p **17** Onderzoek bij een significantieniveau van 5% of er reden is om te veronderstellen dat het vermoeden juist is.

noot 1 Een recurrente betrekking wordt ook wel recursieformule of recursievergelijking genoemd.

---

## Wedden

---

Via internet kun je tegenwoordig bij verschillende bookmakers terecht om te wedden op de uitslag van een sportwedstrijd. Aan de hand van een voetbalwedstrijd laten we zien hoe dat in zijn werk gaat.

De informatie die een bookmaker verstrekte voor de voetbalwedstrijd Ajax – Vitesse van 27 januari 2007 zag er als volgt uit:

**tabel 1**

Wedstrijd: <b>Ajax – Vitesse</b>	Uitkering per ingezette euro
Bij winst voor Ajax	€ 1,75
Bij gelijkspel	€ 3,10
Bij verlies van Ajax	€ 4,10

De getallen 1,75; 3,10 en 4,10 heten de **quotes** van deze weddenschap. Uiteraard kun je meer dan 1 euro inzetten, maar de inzet moet wel altijd een geheel aantal euro's zijn.

De bookmaker stelt bij elke wedstrijd opnieuw de quotes van tevoren vast en maakt deze op internet bekend. Vervolgens kunnen gokkers geld inzetten op een bepaalde uitslag. Hoeveel geld de bookmaker wint of verliest hangt dan alleen nog af van de uitslag van de wedstrijd.

Stel dat er € 100 op elk van de drie uitslagen is ingezet. Als Ajax wint, zal de bookmaker  $300 - 100 \cdot 1,75 = 125$  euro winst maken. Bij gelijkspel zal hij verlies lijden en als Vitesse wint, is zijn verlies zelfs nog groter.

Bovenstaande situatie is niet realistisch, want meestal zullen er meer mensen inzetten op de sterkere club. Veronderstel eens dat er € 15 000 is ingezet op winst voor Ajax, € 9000 op gelijkspel en € 6000 op verlies van Ajax.

- 4p **18** Bereken met de quotes van tabel 1 bij welke uitslag – winst voor Ajax, gelijkspel of verlies van Ajax – de winst voor de bookmaker het grootst is. Geef ook de grootte van die winst.

Zoals gezegd stelt de bookmaker voor elke wedstrijd de quotes vast. Hij weet dan nog niet hoeveel er op de verschillende uitslagen ingezet zal worden. Daarom schat hij dit van tevoren in. Vervolgens kiest hij zijn quotes zó, dat hij bij elke mogelijke uitslag evenveel winst maakt, mits de uiteindelijke verdeling van de inzetten is zoals hij had ingeschat. Bijvoorbeeld bij de quotes 1,55; 3,10 en 9,30 is de uitkering bij gelijkspel 2 keer zo groot als de uitkering bij winst voor de thuisclub, en bij verlies voor de thuisclub zelfs 6 keer zo hoog. Kennelijk schatte de bookmaker in dat de totale inzet op gelijkspel 2 keer zo klein zou zijn als de totale inzet op winst voor de thuisclub, en de totale inzet op verlies voor de thuisclub 6 keer zo klein als de totale inzet op winst voor de thuisclub.

Dat levert de volgende tabel op:

**tabel 2**

Wedstrijd: ...	Inschatting van de verdeling van de inzet	Quotes
Bij winst voor de thuisclub	60%	1,55
Bij gelijkspel	30%	3,10
Bij verlies van de thuisclub	10%	9,30

Als de uiteindelijke inzetverdeling inderdaad wordt zoals de bookmaker heeft ingeschat, dan zal bij deze quotes de bookmaker ongeacht de uitslag van de wedstrijd altijd evenveel uitbetalen.

- 4p **19** Toon door berekening aan dat dit juist is en bereken hoeveel procent van het totale ingezette bedrag winst voor de bookmaker is.

Een bookmaker heeft voor de wedstrijd NAC – PSV van 4 maart 2007 de quotes weer zó gekozen, dat volgens de inschatting van die bookmaker bij elke mogelijke uitslag evenveel winst wordt gemaakt. Deze quotes staan vermeld in tabel 3.

**tabel 3**

Wedstrijd: <b>NAC – PSV</b>	Quotes
Bij winst voor NAC	4,20
Bij gelijkspel	3,50
Bij verlies van NAC	1,73

Blijkbaar is de bookmaker ervan uitgegaan dat een flink percentage van de totale inzet zal worden ingezet op winst voor PSV.

- 4p **20** Bereken dit percentage. Rond af op gehele.