

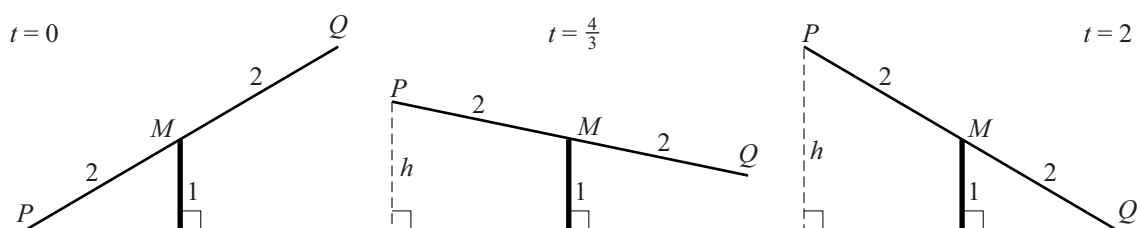
## Het uiteinde van een wip

We bekijken in deze opgave een wiskundig model voor de beweging van het uiteinde van een wip.



Lijnstuk  $PQ$  met midden  $M$  en lengte 4 draait om  $M$ . De hoogte van  $M$  is 1. Zie figuur 1. We kijken naar het verloop van de hoogte  $h$  van  $P$ . Op tijdstip  $t = 0$  is de hoogte van  $P$  gelijk aan 0. Van  $t = 0$  tot  $t = 2$  beweegt  $P$  omhoog. In figuur 1 is het lijnstuk getekend op drie tijdstippen: op  $t = 0$ , op  $t = \frac{4}{3}$  en op  $t = 2$ .

**figuur 1**



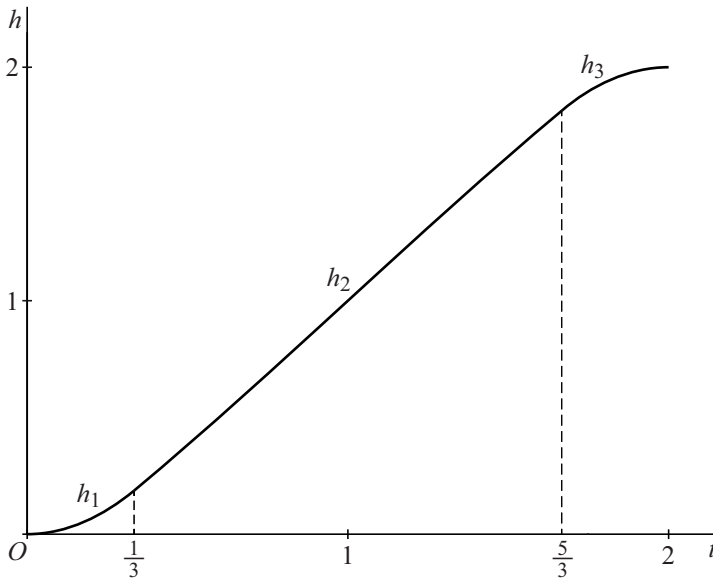
De hoogte van  $P$  tijdens de omhooggaande beweging wordt beschreven door het volgende model:

- fase 1:  $h_1(t) = 1 + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}\right)$  voor  $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$
- fase 2:  $h_2(t) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}\right)$  voor  $\frac{1}{3} < t \leq \frac{5}{3}$
- fase 3:  $h_3(t) = 1 + 2 \sin\left(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30}\right)$  voor  $\frac{5}{3} < t \leq 2$

Hierin zijn  $h_1$ ,  $h_2$  en  $h_3$  de hoogtes van  $P$  in de verschillende fasen.

In figuur 2 is de grafiek van de hoogte van  $P$  in de fasen 1, 2 en 3 getekend.

**figuur 2**



De hoogte van  $P$  aan het eind van fase 2 is  $h_2\left(\frac{5}{3}\right)$ . Door  $t = \frac{5}{3}$  in te vullen in de formule van  $h_3$  kan worden bewezen dat de hoogte van  $P$  aan het begin van fase 3 gelijk is aan de hoogte van  $P$  aan het eind van fase 2.

3p **3** Bewijs dat deze hoogtes gelijk zijn.

De helling van de grafiek van  $h_2$  aan het begin van fase 2 is  $\frac{2\pi}{5} \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ .

4p **4** Bewijs dat de helling van de grafiek van  $h_1$  aan het eind van fase 1 hieraan gelijk is.

Voor elke waarde van  $a$ , met  $0 < a < \frac{2}{3}$ , geldt:

$$\frac{h_2(1-a) + h_2(1+a)}{2} = 1$$

4p **5** Bewijs deze gelijkheid.