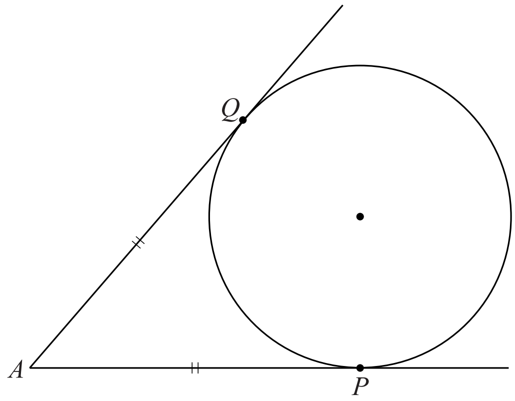
Cirkels in een driehoek

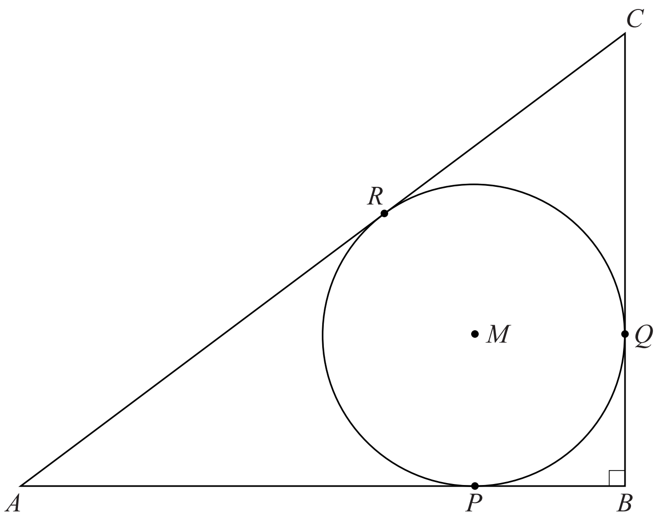
Als vanuit een punt A buiten een cirkel de twee raaklijnen aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van A tot de twee raakpunten P en Q even groot. In figuur 1 geldt dus $AP = AQ$.
Deze eigenschap mag je in deze opgave gebruiken.

figuur 1



Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden $AB = 4$ en $BC = 3$. De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt de zijden van de driehoek in P, Q en R. M is het middelpunt van deze cirkel.
Zie figuur 2.

figuur 2

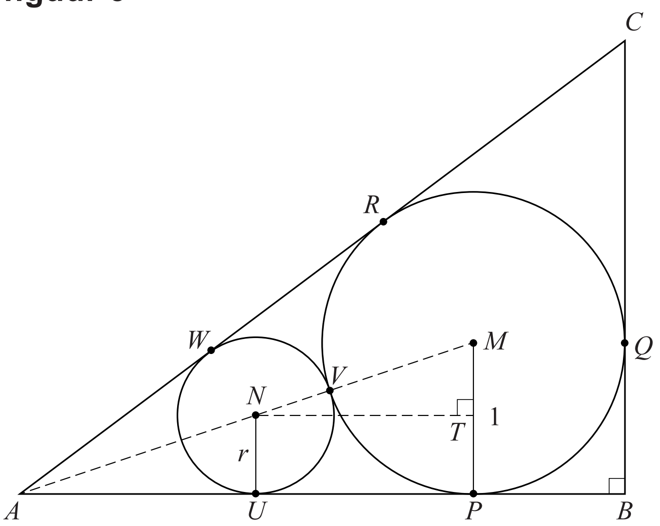


De straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC is 1.

4p **3** Bewijs dit.

Tussen de ingeschreven cirkel en de zijden AB en AC van de driehoek wordt een tweede cirkel met middelpunt N getekend. Deze tweede cirkel raakt de zijde AB in U, de ingeschreven cirkel in V en de zijde AC in W. De punten M, N en A liggen dus op één lijn. De straal NU van de tweede cirkel is r. De loodrechte projectie van N op MP is T. Zie figuur 3.

figuur 3



Er geldt: $AU = 3r$.

3p **4** Bewijs dit.

5p **5** Bereken r. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Gebroken goniometrische functie

Voor elke waarde van a, met $a \neq 0$, is de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{\sin(ax)}{1 - 2\cos(ax)}$$

4p **6** Bereken exact voor welke waarden van a de lijn met vergelijking $x = \pi$ een verticale asymptoot is van de grafiek van f_a.

5p **7** Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.