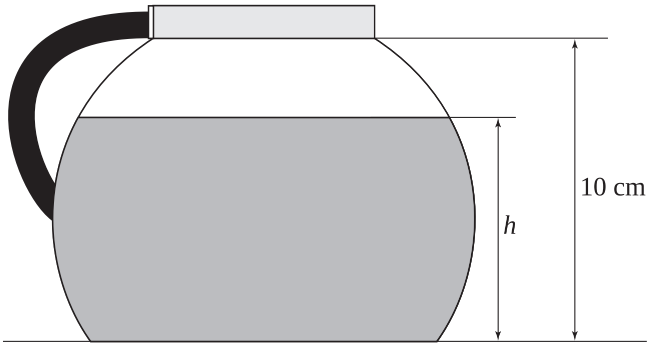
Koffiekan

Bij het zetten van koffie wordt soms een koffiezetapparaat gebruikt.
Deze opgave gaat over een koffiezetapparaat waarbij de koffiekan, zonder het handvat en de bovenrand, de vorm heeft van een aan twee kanten afgeknotte bol.
De hoogte h (in cm) van de vloeistofspiegel in de koffiekan wordt gemeten ten opzichte van de onderkant van de koffiekan. Zie figuur 1.

figuur 1



$V(h)$ is het volume (in cm^3) van de vloeistof (koffie) in de koffiekan als de hoogte van de vloeistofspiegel h cm is.
Er geldt: $V(h) = 33\pi h + 4\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$

In deze opgave gaan we ervan uit dat de hete koffie vanaf het begin met constante snelheid de koffiekan in stroomt. Na precies 8 minuten staat de vloeistofspiegel op 9,2 cm hoogte. Hieruit kun je afleiden dat er 2,5 cm^3 koffie per seconde in de koffiekan stroomt.

3p **1** Toon dit met een berekening aan.

3p **2** Bereken na hoeveel seconden de vloeistofspiegel in de koffiekan op 3,0 cm hoogte staat. Rond je antwoord af op een geheel getal.

In één kopje gaat 120 ml (120 cm^3) koffie. Op de koffiekan staan streepjes die horen bij het vloeistofniveau voor 2, 3, 4, ..., 10 kopjes.
In de figuur op de uitwerkbijlage zijn deze streepjes voor 2 en 10 kopjes al aangegeven. De schaal van deze figuur is 1 : 2.

4p **3** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het streepje dat hoort bij 6 kopjes. Licht je werkwijze toe.

Nadat er koffie is gezet, wordt het koffiezetapparaat uitgeschakeld. De koffie in de kan koelt vervolgens af. Bij het uitschakelen heeft de koffie een temperatuur van 80 °C. In tabel 1 is het temperatuurverloop van de koffie te zien. Je ziet dat de tijd t is gemeten in minuten, waarbij $t = 0$ het moment van uitschakelen is. De temperatuur T is gemeten in °C.

tabel 1

t (in minuten)	0	10	20	30	40	50	60
T (in ºC)	80	59	50	44	40	37	35

De temperatuur in de keuken waar het koffiezetapparaat staat, is 23 °C.
Een formule die het temperatuurverloop van de koffie redelijk benadert, is van de vorm $T = 23 + b \cdot g^t$.
Je kunt de waarden van b en g berekenen door gebruik te maken van het eerste meetpunt (0, 80) en het laatste meetpunt (60, 35).

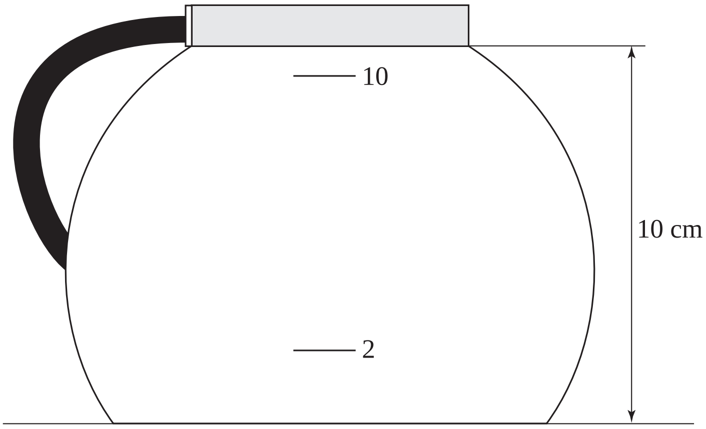
6p **4** Bereken op algebraïsche wijze de waarden van b en g. Rond daarna de waarde van g af op twee decimalen.

Een formule gebaseerd op alle meetgegevens uit de tabel is: $T = 23 + 49 \cdot 0{,}975^t$ met t in minuten en T in °C. Met behulp van deze laatste formule kan berekend worden voor welke waarde van t de koffie afkoelt met een snelheid van 1,0 °C per minuut.

5p **5** Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van t. Rond je antwoord af op één decimaal.

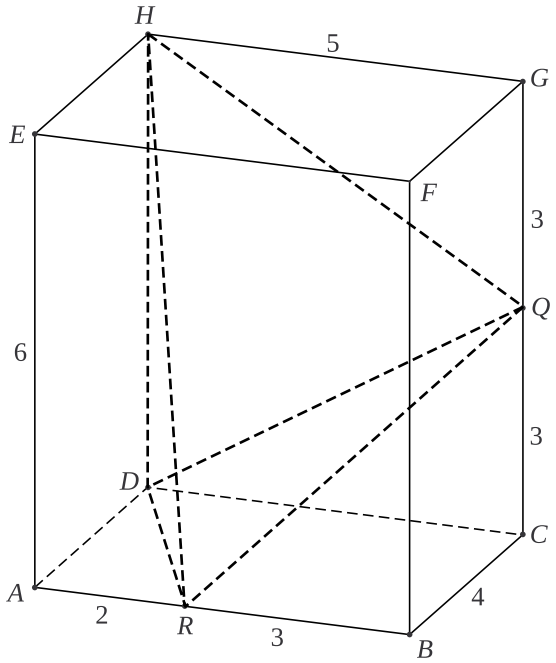
uitwerkbijlage

3



Balk en piramide

figuur 1



Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$. Het grondvlak $ABCD$ is een rechthoek met zijden $AB = 5$ en $BC = 4$. De hoogte AE is gelijk aan 6.
Op AB ligt punt R zodat $AR = 2$. Het punt Q is het midden van CG. Zie figuur 1.
Deze figuur (zonder de afmetingen en zonder de lijnstukken DR en DQ) staat vergroot op de uitwerkbijlage.

5p **6** Teken op de uitwerkbijlage de doorsnede van het vlak door de punten H, R en Q met de balk $ABCD.EFGH$.

De punten D, H, Q en R zijn de hoekpunten van een piramide met grondvlak DHQ en top R.

5p **7** Bereken de inhoud van deze piramide.

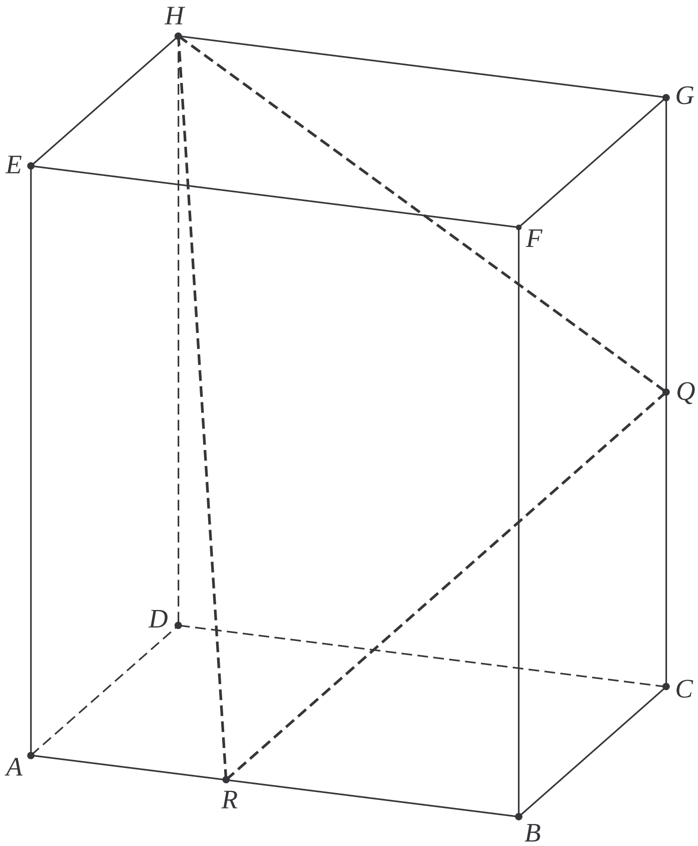
Van de piramide $DHQ.R$ kan een uitslag getekend worden. Op de uitwerkbijlage is hiermee een begin gemaakt. Daar is HD als een lijnstuk van 6 cm getekend.

5p **8** Teken van deze uitslag het deel dat bestaat uit de vlakken DHQ en DRQ.
Licht je werkwijze toe.

6p **9** Bereken de hoek tussen het vlak DRQ en het grondvlak $ABCD$.

uitwerkbijlage

6



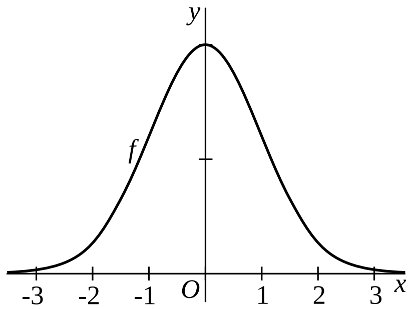
uitwerkbijlage

8

Een symmetrische grafiek

De grafiek in figuur 1 hoort bij de functie f die gegeven is door $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. Deze grafiek is symmetrisch ten opzichte van de y-as en heeft de x-as als horizontale asymptoot.

figuur 1

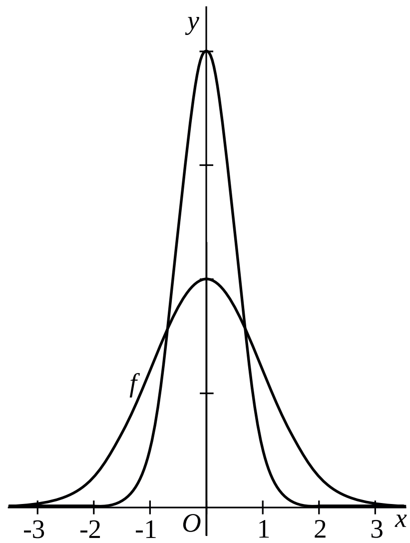


Er zijn punten op de grafiek waarvoor geldt $f(x) = \frac{1}{2}$.

4p **10** Bereken algebraïsch de exacte waarden van de x-coördinaten van deze punten.

Op de grafiek van f worden twee transformaties na elkaar toegepast. Eerst wordt de afstand van de punten van de grafiek tot de x-as twee maal zo groot gemaakt en daarna wordt de afstand tot de y-as gehalveerd. Zie figuur 2.

figuur 2

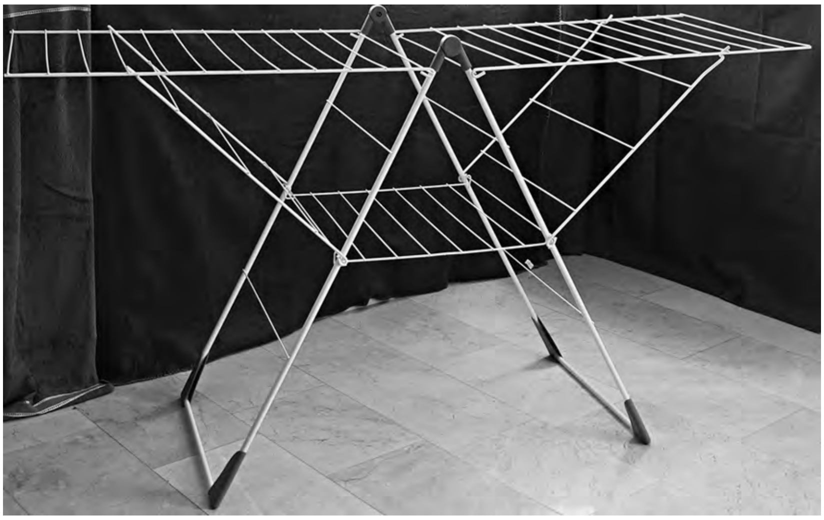


4p **11** Geef een functievoorschrift dat past bij de nieuwe grafiek. Leg uit hoe je aan je antwoord gekomen bent.

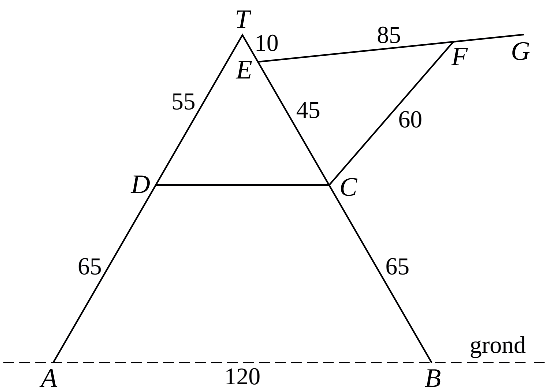
Droogrek

Op de foto staat een droogrek afgebeeld.

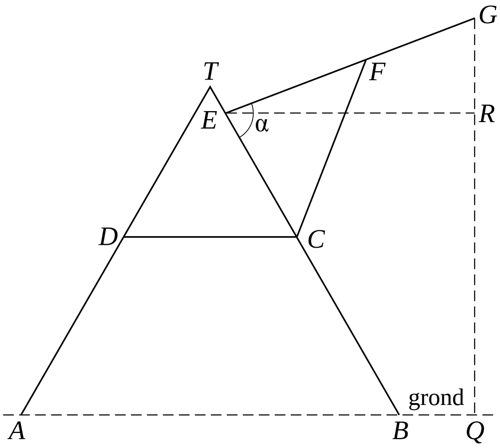
foto



figuur 1



figuur 2



In figuur 1 is het vooraanzicht getekend van een model van het droogrek met slechts één hanggedeelte. In dit vooraanzicht geldt:

- driehoek ABT is gelijkzijdig,
- het hanggedeelte EG is 85 cm lang en is draaibaar om het punt E,
- de steun CF is draaibaar om het punt C,
- het eindpunt F blijkt op 10 verschillende plekken op EG vastgezet te kunnen worden,
- de aangegeven afmetingen zijn in centimeter.

Het hanggedeelte EG maakt een hoek met EB. De grootte van deze hoek noemen we α. Zie figuur 2. De grootte van α hangt af van de plaats waar punt F wordt vastgezet. Wanneer het hanggedeelte in de laagste stand wordt gezet, geldt $EF = 85$. De punten F en G vallen dan samen.

4p **12** Bereken α in deze situatie in hele graden nauwkeurig.

De afstand van het punt E tot de grond is ongeveer 95 cm.

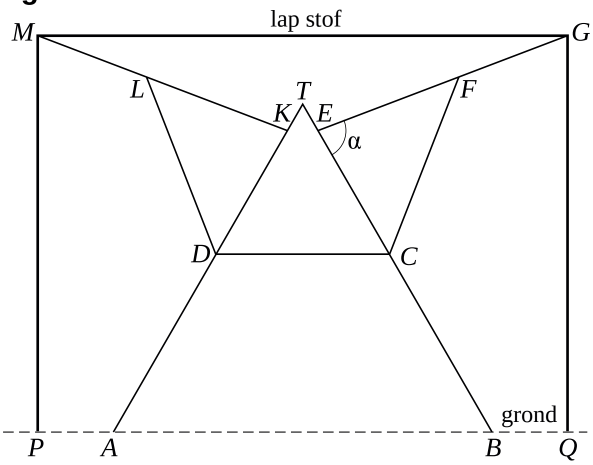
3p **13** Toon dit met een berekening aan.

De hoogte h boven de grond van het punt G is afhankelijk van α. Er geldt: $h = 95 + 85 \cdot \sin(\alpha - 60°)$, met h in cm en α in graden.

4p **14** Toon de juistheid van deze formule aan.

Men vraagt zich af wat de maximale lengte van een rechthoekige lap stof is die over het droogrek te drogen kan worden gehangen zonder dat de uiteinden de grond raken. Beide hanggedeelten, EG en KM, worden daarbij steeds in dezelfde positie geplaatst. In figuur 3 is van deze situatie een vooraanzicht getekend.

figuur 3



Het punt F kan slechts op 10 verschillende standen worden vastgezet. In tabel 1 staat weergegeven hoe groot α is bij 9 verschillende lengten van EF. (In de tabel ontbreekt de tiende lengte, EF = 85. Deze is niet van belang voor het beantwoorden van vraag 15.)

tabel 1

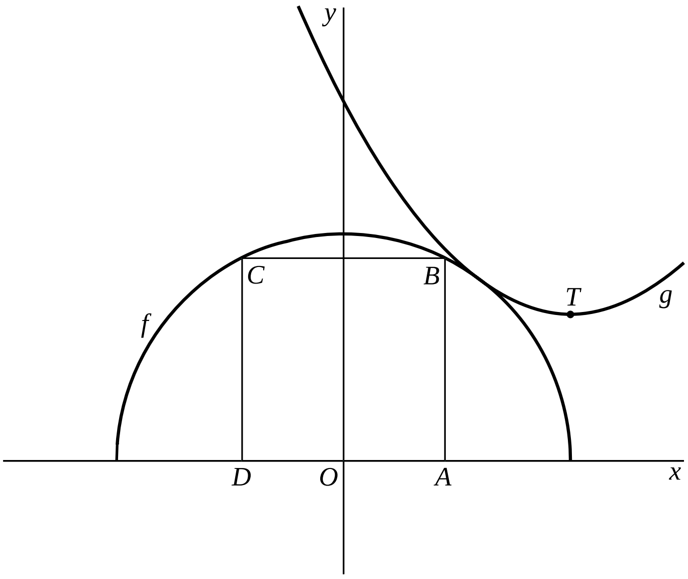
EF (cm)	α (graden)
17,5	144
25	115
32,5	100
40	90
47,5	81
55	73
62,5	66
70	58
77,5	51

6p **15** Onderzoek met behulp van tabel 1 hoe groot de maximale lengte van de lap stof is. Rond je antwoord af op hele centimeters.

Halve cirkel en derdegraadsfunctie

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ en
$g(x)=-\frac{1}{30}x^3+x^2-1{,}9x+1{,}58$.
De grafieken van f en g lijken elkaar te raken. Zie figuur 1.

figuur 1



De grafieken van f en g raken elkaar echter niet. De vergelijking $f(x)=g(x)$ heeft twee oplossingen.

5p **16** Los op voor welke x geldt $f(x)<g(x)$. Rond de grenswaarden van x af op twee decimalen.

De grafiek van f is een halve cirkel. Van het vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en D op de x-as zodat $OA = OD$. De hoekpunten B en C liggen op de halve cirkel.
Om de oppervlakte van vierkant $ABCD$ uit te rekenen, moet eerst de lengte van een zijde worden bepaald. We stellen daartoe $OA = p$. Hieruit volgt $AD = 2p$. Met behulp van $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ vinden we nu $AB=\sqrt{1-p^2}$.

5p **17** Bereken op algebraïsche wijze de exacte oppervlakte van het vierkant.

Het punt T in de figuur is een top van de grafiek van de functie g.

4p **18** Bereken op algebraïsche wijze de x-coördinaat van het punt T.