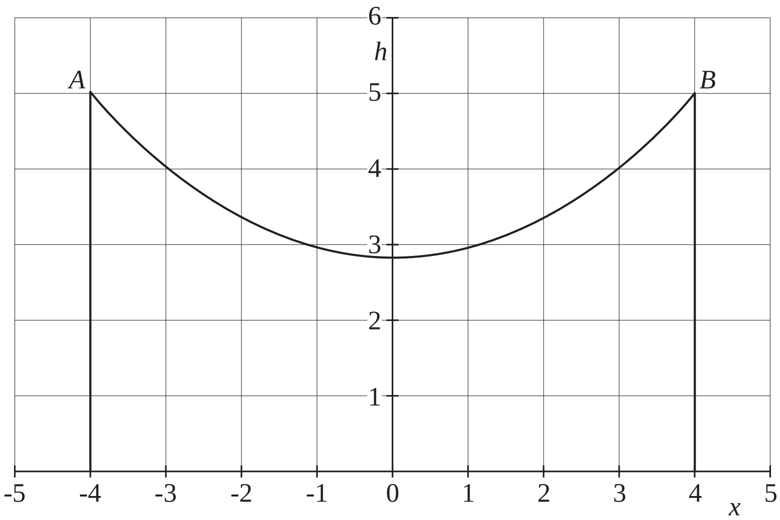
Kettinglijn

Als we een vrij hangend, volkomen buigzaam, overal even dik en even zwaar touw tussen twee punten A en B ophangen, dan hangt het touw in een gebogen lijn. Deze lijn wordt een kettinglijn genoemd.
We bekijken een kettinglijn waarbij de punten A en B zich beide 5 meter boven de grond bevinden op een afstand van 8 meter van elkaar. We brengen in het verticale vlak waarin het touw hangt, een assenstelsel aan zo dat het laagste punt van het touw op de y-as ligt en de x-as horizontaal langs de grond loopt. In het assenstelsel in figuur 1 heeft A de coördinaten (–4,5) en B de coördinaten (4,5).

figuur 1

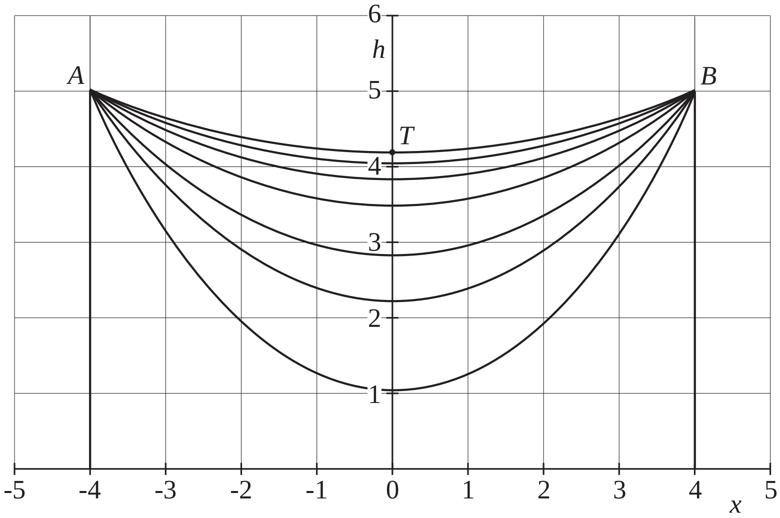


De kettinglijn in figuur 1 is dan de grafiek van de functie $h(x) = 2(e^{\frac{1}{4}x} + e^{-\frac{1}{4}x}) + c$ met h en x in meter.

3p **18** Bereken de exacte waarde van c.

Als men touwen van verschillende lengte ophangt tussen A en B, dan zal het langste touw het verste doorhangen. In figuur 2 is een aantal touwen van verschillende lengte te zien. Hier is ook te zien dat het kortste touw het hoogste hangt.

figuur 2



Het is duidelijk dat hoe hoger het touw hangt, hoe kleiner de helling is in punt B.
Bij de bovenste kettinglijn in figuur 2 met als laagste punt T hoort de formule
$h_T(x) = 5(e^{0,1x} + e^{-0,1x}) - 5,81$.

4p **19** Bereken van deze kettinglijn met behulp van differentiëren de helling in punt B. Rond je antwoord af op 2 decimalen.

In figuur 2 zie je zeven kettinglijnen. Deze kettinglijnen lijken op dalparabolen.
De functievoorschriften voor deze dalparabolen hebben de vorm: $f(x) = ax^2 + b$.
Voor de dalparabool die door de punten A, B en T gaat, geldt dat $a = 0,050625$ en $b = 4,19$.

3p **20** Toon dit door middel van een berekening aan.

Hoewel de kettinglijnen uit figuur 2 lijken op dalparabolen, zijn ze dat niet. Zo valt bijvoorbeeld de kettinglijn gegeven door de formule van $h_T(x)$ niet samen met de dalparabool gegeven door de formule van $f(x)$ met $a = 0,050625$ en $b = 4,19$. De verticale afstand tussen de grafieken kan berekend worden met de verschilfunctie $v(x) = f(x) - h_T(x)$.

3p **21** Bereken de maximale waarde van $v(x)$ op het interval [–4, 4] in 3 decimalen nauwkeurig.

Het functievoorschrift voor een willekeurige kettinglijn door de punten A en B wordt gegeven door:

$$h(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx} - e^{4k} - e^{-4k}) + 5 \text{ waarbij } -4 \le x \le 4.$$

Hierin is k een constante die afhangt van de lengte van de ketting.
Er wordt een ander touw opgehangen tussen A en B. Het laagste punt van dit touw valt precies samen met (0,0).

4p **22** Bereken de waarde van k van dit touw in 2 decimalen nauwkeurig.