

Examen HAVO

2024

tijdvak 1
dinsdag 14 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2-kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$,

waarin a , b , c en d absolute aantallen zijn

- als $phi < -0,4$ of $phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”
- als $-0,4 \leq phi < -0,2$ of $0,2 < phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”
- als $-0,2 \leq phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$)

(met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met \bar{X}_1 en \bar{X}_2 de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹⁾ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

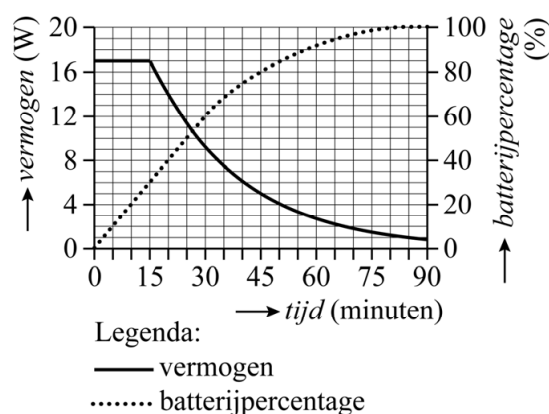
'Ff me telefoon opladen'

Op de foto zie je een telefoon waarvan het batterijpercentage 73% is. Daarmee wordt bedoeld dat de batterij van de telefoon voor 73% is opgeladen. Wanneer het batterijpercentage van een telefoon lager is dan 100%, kan de telefoon worden opgeladen met behulp van een oplader. Zo'n oplader levert een bepaald vermogen in watt (W). Welk vermogen op een bepaald moment door de oplader wordt geleverd, hangt af van het type telefoon en het batterijpercentage dat de telefoon op dat moment heeft.

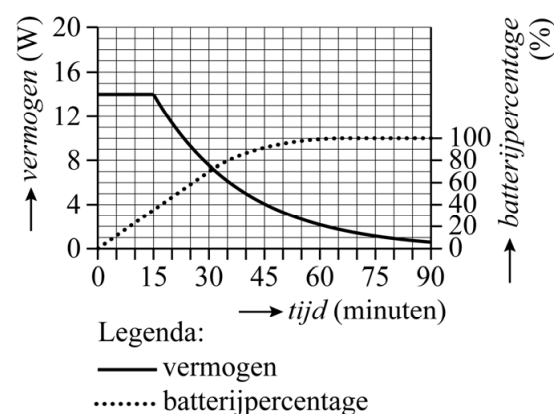


In de figuren 1 en 2 zie je de grafieken die horen bij twee types telefoons (PRO 5 en PRO 6). Op de horizontale as staat de tijd vanaf het moment dat de lege telefoon aan de oplader gelegd wordt.

figuur 1 PRO 5



figuur 2 PRO 6



Op de uitwerkbijlage is figuur 1 vergroot afgebeeld, waarbij de doorgetrokken grafiek en de bijbehorende linker as zijn weggelaten. Het batterijpercentage van de PRO 5 neemt in de eerste 30 minuten lineair toe. Als het batterijpercentage op dezelfde manier zou blijven toenemen, dan is de totale oplaadtijd (van 0 tot 100%) korter dan nu af te lezen is uit figuur 1.

- 3p 1 Bepaal door te tekenen in de figuur op de uitwerkbijlage hoeveel minuten de totale oplaadtijd in dat geval zou zijn. Geef je antwoord in hele minuten.

Djimon heeft een PRO 5 en Sasha heeft een PRO 6. Ze leggen hun telefoons op hetzelfde moment aan de oplader. Sasha's telefoon had op dat moment een batterijpercentage van 10%. Beide telefoons bereiken na verloop van tijd op precies hetzelfde moment een batterijpercentage van 90%.

- 4p **2** Bepaal voor hoeveel procent de batterij van Djimon opgeladen was op het moment dat zijn telefoon aan de oplader gelegd werd. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuren op de uitwerkbijlage. Geef je antwoord in hele procenten.

Het eerste stuk van de gestippelde grafieken in figuur 1 en figuur 2 is voor zowel de PRO 5 als de PRO 6 te beschrijven door een formule van de vorm $B = c \cdot t$, waarbij B het batterijpercentage in procenten is, t de tijd in minuten en c een getal.

- 2p **3** Onderzoek of het getal c bij de PRO 5 groter is dan bij de PRO 6. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuren op de uitwerkbijlage.

In de laatste twee onderdelen van deze opgave kijken we naar het vermogen dat de oplader levert.

In figuur 1 is te zien dat de oplader van de PRO 5 de eerste 15 minuten zijn maximale vermogen van 17 W levert. Na deze eerste 15 minuten daalt het geleverde vermogen bij benadering exponentieel. Op de uitwerkbijlage is figuur 1 vergroot afgebeeld, waarbij de gestippelde grafiek en de bijbehorende rechteras zijn weggelaten.

- 5p **4** Bereken met de gegevens bij 20 en bij 85 minuten met hoeveel procent per minuut het geleverde vermogen van de oplader van de PRO 5 afneemt. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage. Geef je antwoord in hele procenten.

Als de telefoons van Sasha en Djimon beide vanaf een batterijpercentage van 0% 90 minuten aan de oplader worden gelegd, dan hoeft de oplader van Sasha minder vermogen te leveren dan die van Djimon.

- 2p **5** Leg aan de hand van de figuren 1 en 2 op de uitwerkbijlage uit waarom dit klopt.

Leerkrachten basisonderwijs

In 2017 werd er gestaakt door leerkrachten in het basisonderwijs. Er was sprake van aanhoudende onvrede over onder meer het salaris en de werkdruk. In deze opgave wordt met 'leerkrachten' telkens 'leerkrachten in het basisonderwijs' bedoeld.

Leerkrachten verdienden in 2015 gemiddeld een bruto-uurloon van 26 euro. Daarmee verdienden zij 14 procent minder dan werknemers buiten het onderwijs met hetzelfde opleidingsniveau.

- 3p **6** Bereken het gemiddelde bruto-uurloon in 2015 van werknemers buiten het onderwijs met hetzelfde opleidingsniveau. Geef je antwoord in een geheel aantal euro's.

In een enquête in 2017 kregen leerkrachten onder meer de volgende drie vragen voorgelegd:

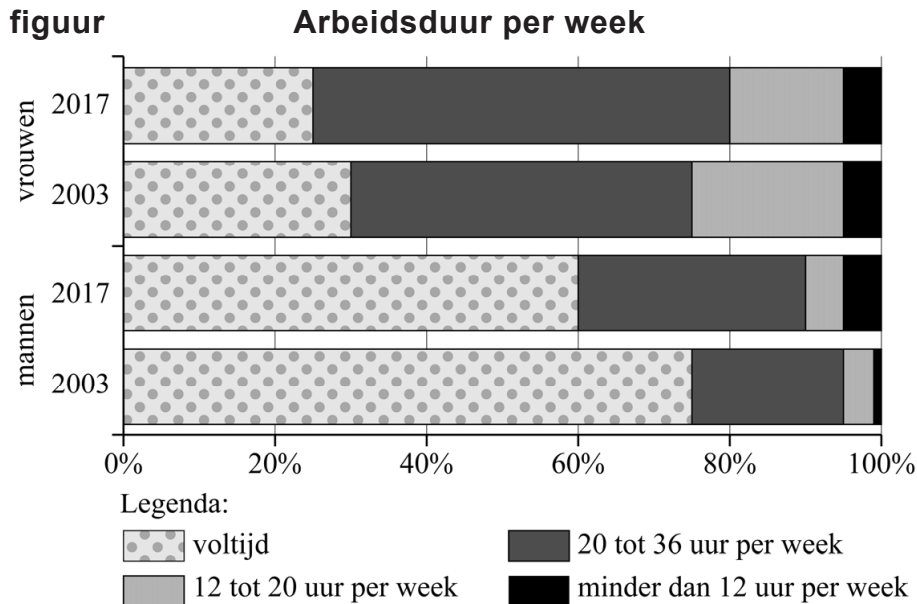
- 1 Moet u erg snel werken?
- 2 Moet u heel veel werk doen?
- 3 Moet u extra hard werken?

Zij konden steeds antwoorden met: 'nooit', 'soms', 'vaak' of 'altijd'.

Bij deze vragen horen drie variabelen die elk kwalitatief en ordinaal zijn.

- 2p **7** Leg uit waarom de drie variabelen kwalitatief zijn. Leg ook uit waarom de drie variabelen ordinaal zijn.

In het basisonderwijs werken veel parttimers. In de rest van deze opgave kijken we naar de arbeidsduur per week van leerkrachten. Zowel in 2003 als in 2017 is hier onderzoek naar gedaan. We nemen aan dat er in 2003 en in 2017 een aselechte steekproef is getrokken uit alle leerkrachten die toen werkzaam waren. In de steekproeven is van elke leerkracht zijn of haar arbeidsduur in uur per week bekend. De steekproefresultaten zijn verwerkt in de figuur op de volgende pagina.



Uit de figuur kun je bijvoorbeeld afleiden dat in 2017 bij de mannen de steekproefproportie die voltijds werkt 0,6 is.

Veronderstel dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de bijbehorende populatieproportie precies $[0,58; 0,62]$ is.

- 3p **8** Bereken met deze gegevens het totaal aantal mannen in de steekproef van 2017.

Op basis van de figuur zou je kunnen denken dat er in de steekproef van alle leerkrachten in 2017 een lager percentage voltijds werkt dan in de steekproef van alle leerkrachten in 2003.

- 4p **9** Geef een getallenvoorbeeld waaruit blijkt dat dit niet noodzakelijk waar hoeft te zijn. Licht je antwoord toe.

We kijken in het laatste onderdeel van deze opgave naar het verschil in arbeidsduur voor mannen en vrouwen die als leerkracht werken.

In een steekproef onder leerkrachten in 2021 was de gemiddelde arbeidsduur voor de mannen 31,2 uur per week met een standaardafwijking van 8,3. De vrouwen werkten gemiddeld 27,2 uur per week met een standaardafwijking van 7,6. Vaak wordt beweerd dat er een groot verschil bestaat in de arbeidsduur per week voor mannen en vrouwen die als leerkracht werken. Bovenstaande gegevens over gemiddelden en standaardafwijkingen in combinatie met de vuistregels op het formuleblad leiden echter tot een andere conclusie, namelijk dat het verschil middelmatig is.

- 3p **10** Laat met een berekening zien dat deze conclusie juist is.

Hart-lopen

Tijdens het hardlopen gaat je hartslag omhoog. Maar als die heel hoog oploopt, werkt je hart niet meer optimaal. Daarom is het van belang om rekening te houden met je maximale hartslag. De maximale hartslag is onder andere afhankelijk van je leeftijd en je geslacht.

In deze opgave kijken we naar de hartslag van volwassen mannen. Er zijn verschillende formules om de maximale hartslag te berekenen, bijvoorbeeld voor ongetrainde en getrainde mannen:

$$M_{\text{ongetraind}} = 220 - L \quad (\text{formule 1})$$

$$M_{\text{getraind}} = 205,8 - 0,685 \cdot L \quad (\text{formule 2})$$

Hierin is M de maximale hartslag in aantal slagen per minuut en L de leeftijd in hele jaren.

De hartslag geeft je belangrijke informatie tijdens een training. Met behulp van een sporthorloge kun je je hartslag tijdens de training in de gaten houden.

De tabel geeft voor diverse soorten trainingen advies over de hartslag die je tijdens die training zou moeten aanhouden.



tabel

soort training	percentage van de maximale hartslag
warming-up / coolingdown	45 – 60
rustige duurtraining	60 – 70
intensieve duurtraining	70 – 80
maximale duurtraining	80 – 90
zware kortdurende inspanningstraining	90 – 100

Hans is een getrainde man van 48 jaar, houdt een rustige duurtraining en volgt daarbij het advies uit de tabel op.

- 3p 11 Bereken welke waarden van de hartslag er voor Hans mogelijk zijn waarbij hij zich houdt aan het advies. Geef de waarden in een geheel aantal slagen per minuut.

De formules voor de maximale hartslag voor ongetrainde en getrainde mannen verschillen. Je kunt je afvragen bij welke leeftijden ze meer dan 5 slagen per minuut verschillen.

- 5p 12 Onderzoek bij welke leeftijden dit het geval is.

De Engelse fysioloog Hill stelde dat de hardloopprestatie wordt bepaald door de maximale zuurstofopname Z van het lichaam, uitgedrukt in het aantal milliliters per minuut per kilogram lichaamsgewicht (ml/min per kg).

Een formule waarmee Z bij benadering kan worden bepaald is:

$$Z = 15 \cdot \frac{M}{R} \quad (\text{formule 3})$$

Hierin is M de maximale hartslag en R de hartslag in rust, beide in aantal slagen per minuut.

Een marathon is een hardloopwedstrijd over 42,195 km. De gemiddelde snelheid v waarmee een hardloper een marathon kan lopen, is afhankelijk van Z . Deze gemiddelde snelheid v (in km/uur) kan berekend worden met de volgende formule:

$$v = \frac{Z}{3,74} \quad (\text{formule 4})$$

Als twee mannen dezelfde hartslag in rust hebben, dan kun je met behulp van de formules 3 en 4 beredeneren dat de persoon met een hogere maximale hartslag een snellere tijd kan lopen op de marathon dan de persoon met een lagere maximale hartslag.

3p 13 Geef deze redenering zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

Jan, die een marathon gaat lopen, heeft een maximale hartslag van 190 slagen per minuut en een hartslag in rust van 60 slagen per minuut.

4p 14 Bereken met behulp van de formules 3 en 4 de tijd die hij op de marathon gaat lopen. Geef je antwoord in gehele minuten.

Met behulp van de formules 3 en 4 is de volgende formule af te leiden voor de gemiddelde snelheid die een hardloper kan lopen op een marathon:

$$v = \frac{15M}{3,74R} \quad (\text{formule 5})$$

Vervolgens is er met behulp van de formules 2 en 5 een formule af te leiden die voor een getrainde man v uitdrukt in L en R . Deze formule is te schrijven in de vorm:

$$v = \frac{a - b \cdot L}{R} \quad (\text{formule 6})$$

Hierin zijn a en b getallen.

3p 15 Leid formule 6 af uit de formules 2 en 5. Geef daarbij a en b in één decimaal.

Zonnebrandcrème, in deze opgave kortweg crème, beschermt de huid tegen verbranding door de zon. De mate van bescherming die een crème biedt, wordt aangegeven met de zogenoemde beschermingsfactor, in deze opgave kortweg factor. Hoe hoger de factor van de crème, hoe beter de bescherming tegen de zon.



In een onderzoek werd de volgende stelling voorgelegd aan een aselechte steekproef uit de populatie ouders van jonge kinderen:

Als je je insmeert met een crème met factor 50, dan kun je niet meer verbranden.

De steekproef bevatte 410 mannen en 611 vrouwen. De onderzoeker was benieuwd in hoeverre er verschil zou zijn tussen de reacties van mannen en vrouwen. In de steekproef waren 74 mannen en 79 vrouwen het eens met de stelling.

- 4p **16** Onderzoek of de 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie mannen en vrouwen die het eens zijn met de stelling elkaar overlappen.

Met behulp van het formuleblad kunnen we onderzoeken of het verschil tussen mannen en vrouwen wat betreft het wel of niet eens zijn met de stelling gering, middelmatig of groot is.

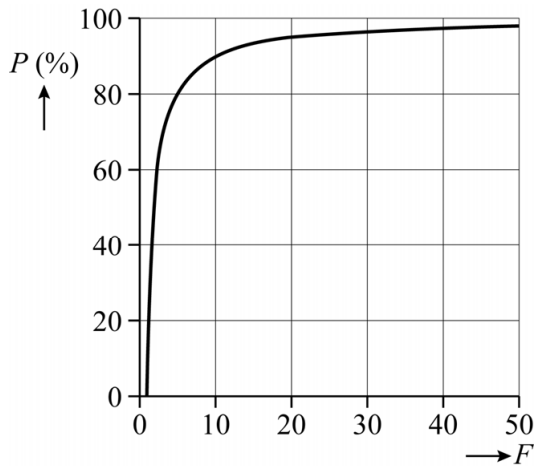
- 4p **17** Voer dit onderzoek uit.

Zonlicht bevat uv A-straling die diep in de huid kan doordringen en daar schade kan aanrichten. Door crème te gebruiken wordt een deel van die straling geblokkeerd. Voor het percentage P van de uv A-straling dat geblokkeerd wordt, geldt:

$$P = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{F}\right), \text{ waarbij } F \text{ de factor van de crème is.}$$

In de figuur op de volgende pagina is de grafiek afgebeeld die bij de formule hoort.

figuur



In de figuur is te zien dat de bescherming tegen uv A-straling toeneemt als de waarde van F toeneemt.

3p **18** Beredeneer aan de hand van de formule dat de bescherming tegen uv A-straling toeneemt als de waarde van F toeneemt, zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

3p **19** Bereken vanaf welke factor een crème minimaal 98% van de uv A-straling tegenhoudt.

In de richtlijnen van huidartsen worden vaak alleen de gewenste blokkeringspercentages (P) voor een crème genoemd. Het is dan handig om F te kunnen berekenen met een herleide vorm van de formule voor P .

3p **20** Herleid de formule voor P tot een vorm waarin F wordt uitgedrukt in P .

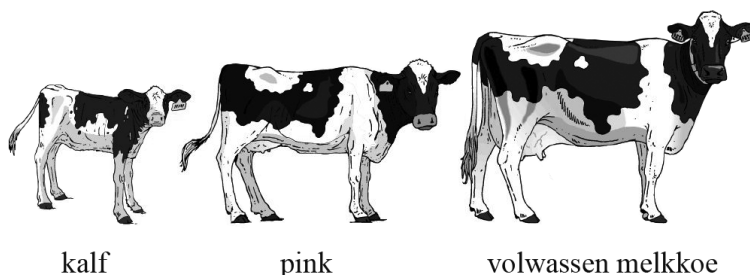
Het is zo dat een crème met factor 30 twee keer zo lang tegen zonnebrand beschermt als een crème met factor 15.

3p **21** Onderzoek of het percentage van de uv A-straling dat geblokkeerd wordt door een crème met factor 30 dan ook twee keer zo groot is als dat van een crème met factor 15.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Over koetjes en kalfjes

Op melkveebedrijven wordt onderscheid gemaakt tussen jongvee en volwassen melkkoeien. Binnen het jongvee wordt nog onderscheid gemaakt tussen kalveren en pinken.



De grootte van een melkveebedrijf wordt uitgedrukt in het aantal grootvee-eenheden (GVE). In de tabel staat voor hoeveel GVE een dier van een bedrijf meetelt.

tabel

		leeftijd (jaar)	aantal GVE
jongvee	kalf	0 tot 1	0,25
	pink	1 tot 2	0,5
volwassen melkkoe		2 of ouder	1

In de periode 2005-2016 zijn melkveebedrijven gemiddeld genomen steeds groter geworden. Vanaf 2005 is het gemiddeld aantal volwassen melkkoeien per melkveebedrijf in Nederland jaarlijks met 3,75% gestegen tot 99 in 2016. Tegelijkertijd steeg het gemiddeld aantal GVE per bedrijf van 84 in 2005 tot 126 in 2016.

Neem aan dat er op elk bedrijf altijd evenveel kalveren als pinken waren.

- 7p 22 Onderzoek hoeveel stuks jongvee er in de periode 2005-2016 gemiddeld per bedrijf bij zijn gekomen.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.