

Limietpunt

Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door:

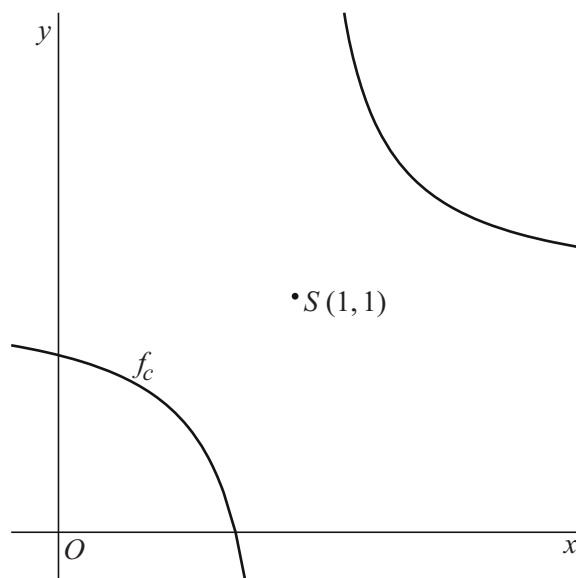
$$f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$$

- 3p 13 Bewijs dat voor elke waarde van c de functie f_c de inverse is van zichzelf.

Punt S is het punt met coördinaten $(1, 1)$.

In figuur 1 is voor een waarde van c de grafiek van f_c weergegeven.

figuur 1



De grafiek van f_c is puntsymmetrisch ten opzichte van S als voor elke waarde van p geldt:

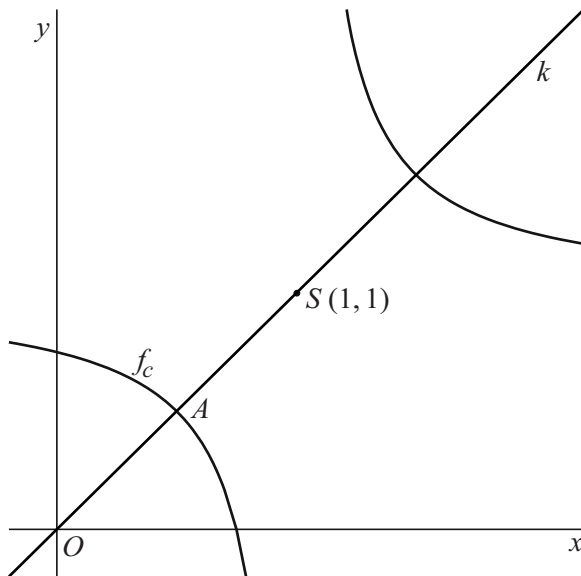
$$\frac{f_c(1+p) + f_c(1-p)}{2} = 1$$

- 3p 14 Bewijs met behulp van deze formule dat voor elke waarde van c de grafiek van f_c puntsymmetrisch is ten opzichte van S .

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = x$. Lijn k snijdt de grafiek van f_c in twee punten. Punt A is het linker snijpunt.

In figuur 2 is de situatie van figuur 1 uitgebreid met A en k .

figuur 2



Als c groter wordt, verschuift A over lijn k , waarbij zowel de x -coördinaat als de y -coördinaat van A toenemen.

Als c onbegrensd toeneemt, naderen zowel de x -coördinaat als de y -coördinaat van A tot een limietwaarde. Het punt A nadert daarom tot een vast punt: het limietpunt van A .

- 5p 15 Druk de coördinaten van A uit in c en bewijs met behulp van deze coördinaten dat S het limietpunt is van A .

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.