

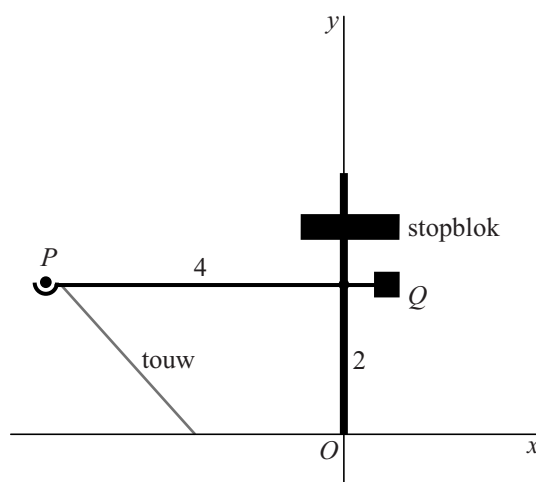
Over de muur

In vroeger tijden probeerde men met een katapult kogels over vestingmuren te slingeren. In deze opgave bekijken we een katapult met een draaibare hefboom. Het linker deel van de hefboom is 4 meter lang. Op het einde daarvan ligt een kogel met middelpunt P . Aan het einde van het rechter deel van de hefboom zit een contragewicht Q . In het begin wordt de hefboom horizontaal gehouden door een touw tussen de hefboom en de grond. De hoogte van de hefboom is dan 2 meter.

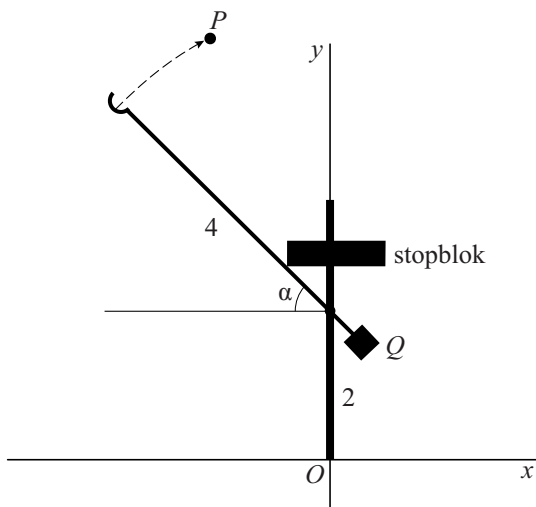
In figuur 1 is deze beginstand getekend in een assenstelsel met oorsprong O op de grond. Punt P heeft dan coördinaten $(-4, 2)$.

Nadat het touw wordt doorgesneden, gaat de hefboom draaien in de richting van de wijzers van de klok, tot deze draaiing door een verstelbaar stopblok wordt gestopt en de kogel wegvliegt. De draaihoek in de eindstand wordt de **stophoek** α genoemd, met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ radialen. In figuur 2 is de eindstand getekend.

figuur 1
beginstand



figuur 2
eindstand



- 2p 10 Druk de coördinaten van P uit in de stophoek α op het moment dat de eindstand wordt bereikt.

Als de hefboom bij stophoek α tot stilstand komt, verlaat de kogel de hefboom en vliegt vervolgens door de lucht. De baan die P dan beschrijft is bij benadering gegeven door de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 20t \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\sin \alpha} - 4 \cos \alpha \\ y(t) = -5t^2 + 2 + 20t \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{\sin \alpha} + 4 \sin \alpha \end{cases}$$

Hierin is t de tijd in seconden vanaf het moment dat de kogel de hefboom verlaat. Verder zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meter en is α in radialen.

Voor y_{top} , de y -coördinaat van het hoogste punt van de baan van P , geldt:

$$y_{\text{top}} = 2 + 24 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha$$

- 5p 11 Bewijs dat de formule voor y_{top} volgt uit de bewegingsvergelijkingen.

Uit de formule voor y_{top} kan de waarde van de stophoek α worden berekend waarvoor de kogel de grootst mogelijke hoogte bereikt. In dit optimale geval zijn de bewegingsvergelijkingen voor P bij benadering gelijk aan:

$$\begin{cases} x(t) = 10,1t - 3,1 \\ y(t) = -5t^2 + 12,3t + 4,5 \end{cases}$$

- 4p 12 Toon met een berekening aan dat in dit geval inderdaad bij benadering geldt: $y(t) = -5t^2 + 12,3t + 4,5$

De stophoek is zo ingesteld dat de kogel zo hoog mogelijk komt. Als de katapult, gemeten vanaf O , 24 meter van een 6 meter hoge vestingmuur staat, komt de kogel niet over de muur.

- 5p 13 Bereken de afstand waarover de katapult minstens in de richting van de muur moet worden verschoven zodat de kogel wel over de muur komt. Geef het antwoord in gehele meters.