

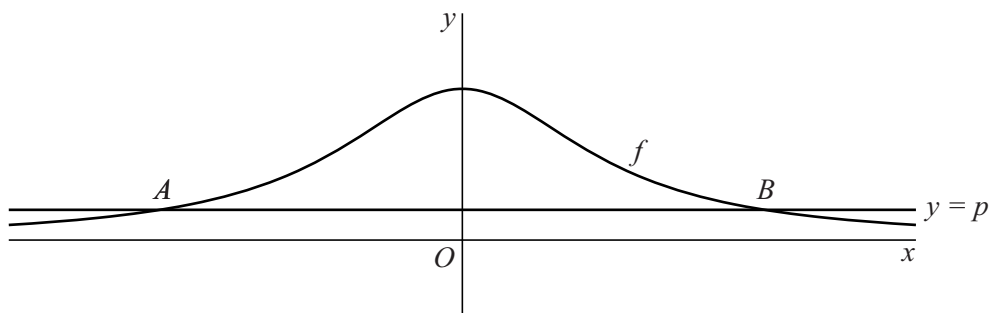
## De kromme van Agnesi

De functie  $f$  is gegeven door  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

De grafiek van deze functie is onder andere bestudeerd door de Italiaanse wiskundige Maria Agnesi (1718-1799).

In figuur 1 is de grafiek van  $f$  weergegeven. De top van de grafiek is  $(0, 1)$ . Ook is voor een zekere waarde van  $p$ , met  $0 < p < \frac{1}{2}$ , de lijn met vergelijking  $y = p$  weergegeven. Deze lijn snijdt de grafiek van  $f$  in twee punten  $A$  en  $B$ .

figuur 1

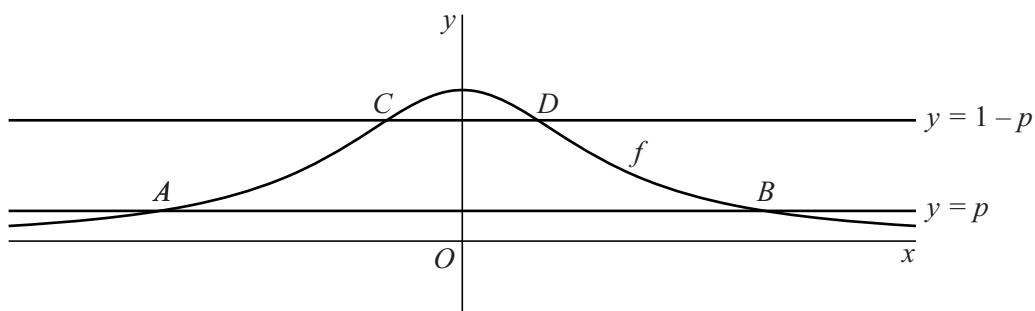


De lengte van lijnstuk  $AB$  is  $2\sqrt{\frac{1}{p} - 1}$ .

3p 15 Bewijs dit.

In figuur 2 zijn opnieuw de grafiek van  $f$  en de lijn met vergelijking  $y = p$ , met  $0 < p < \frac{1}{2}$ , weergegeven. Ook is de lijn met vergelijking  $y = 1 - p$  weergegeven. Deze lijn snijdt de grafiek van  $f$  in twee punten  $C$  en  $D$ .

figuur 2



Er geldt:  $AB \cdot CD = 4$

4p 16 Bewijs dit.

De grafiek van  $f_a$  ontstaat uit de grafiek van  $f$  door twee transformaties: een vermenigvuldiging van de grafiek van  $f$  ten opzichte van de  $x$ -as met een positieve factor  $a$  en vervolgens een vermenigvuldiging van de zo verkregen grafiek ten opzichte van de  $y$ -as met dezelfde factor  $a$ .

3p 17 Stel een functievoorschrift op voor  $f_a$ . Schrijf je antwoord als één breuk.