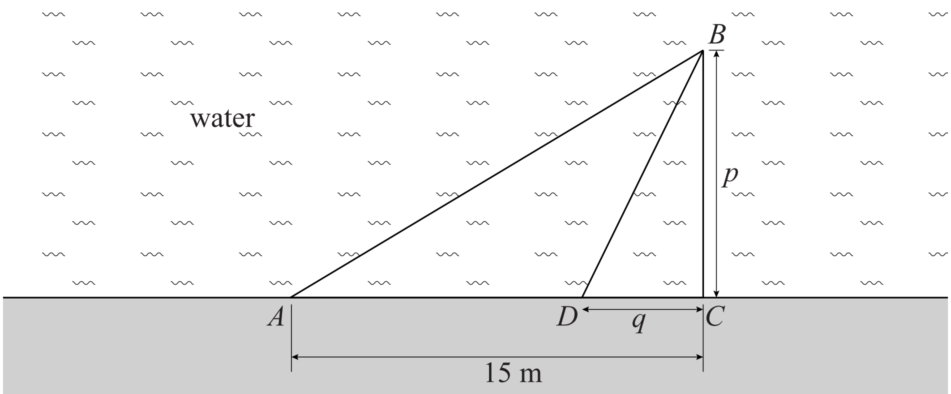
## Elvis

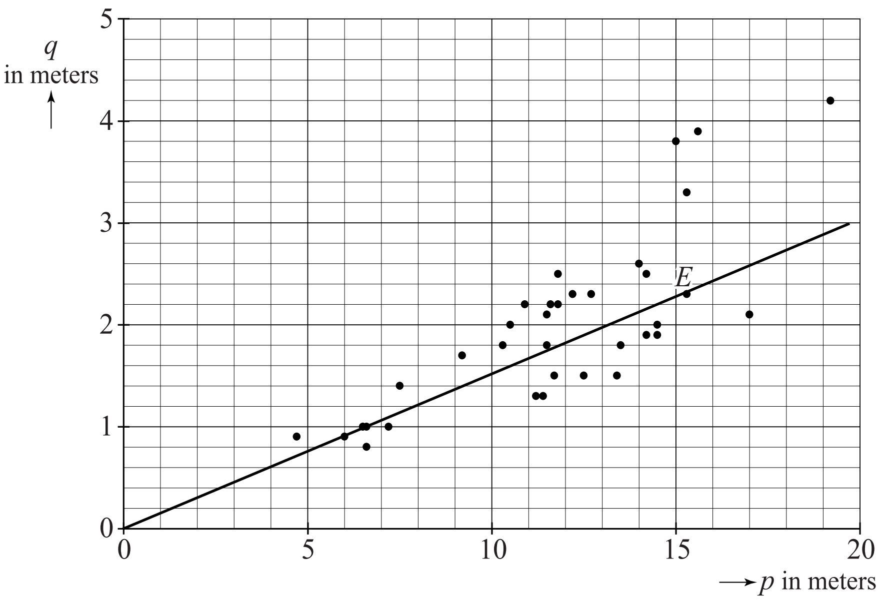
De Amerikaan T.J. Pennings heeft onderzocht hoe snel zijn hond Elvis een weggegooide bal bereikt. In figuur 1 staat een schets van het bovenaanzicht van de situatie. Pennings en Elvis staan bij het vaste punt $A$. Het vaste punt $C$ bevindt zich 15 meter verderop langs de waterkant. Pennings gooit een bal in het water, zodanig dat deze ergens op de denkbeeldige lijn door $C$ loodrecht op de waterkant terechtkomt; het punt waar de bal terechtkomt, noemen we $B$. De afstand $BC$, uitgedrukt in meters, noemen we $p$.

**figuur 1**




Elvis bepaalt zelf het punt vanaf waar hij gaat zwemmen. Dat punt noemen we $D$. Dus Elvis rent van $A$ naar $D$ langs de waterkant en zwemt vervolgens van $D$ naar $B$.
Pennings doet dit experiment 35 keer[1)], waarbij hij de afstand $p$ steeds varieert. Bij elke worp noteert hij $p$ en de afstand $CD$. Deze afstand $CD$, uitgedrukt in meters, noemen we $q$. De waarden van $p$ en $q$ heeft Pennings uitgezet in figuur 2: elk punt hoort bij een worp.

**figuur 2**




noot 1 Eigenlijk gooide Pennings wel vaker dan 35 keer, maar alle keren waarbij hij er niet in slaagde om de bal ter hoogte van $C$ te gooien, schrapte hij uit zijn waarnemingen.

Zo lees je af dat bij een van de worpen geldt: $p = 15,3$ en $q = 2,3$ (zie punt $E$). Dat betekent dat Elvis 2,3 meter voor punt $C$ in het water springt. Uit figuur 2 blijkt dat de punten bij benadering op een rechte lijn door (0,0) liggen. Dat betekent dat $q$ recht evenredig is met $p$.
Op basis van deze recht evenredigheid kan men de volgende conclusies trekken:

1 Hoe verder van punt $C$ de bal in het water komt, hoe eerder Elvis het water in springt.
2 Als de afstand $CB$ twee keer zo klein wordt, wordt de afstand $AD$ ook twee keer zo klein.

4p **13** Geef van elk van de beide bovenstaande conclusies aan of deze volgt uit het recht evenredige verband. Licht je antwoord toe.

De vergelijking van de rechte lijn uit figuur 2 is bij benadering $q = 0,2p$.
Hierin is de richtingscoëfficiënt 0,2 een grove benadering.

3p **14** Bereken de waarde van de richtingscoëfficiënt van deze lijn in twee decimalen nauwkeurig met behulp van figuur 2.

Het is ook mogelijk het gedrag van Elvis theoretisch te bekijken. Hierover gaat de rest van deze opgave.
De afstand $AC$ is 15 meter en de afstand $BD$ is volgens de stelling van Pythagoras gelijk aan $\sqrt{p^2 + q^2}$. We nemen bovendien aan dat Elvis met een constante snelheid van 7 m/s rent en met een constante snelheid van 1 m/s zwemt.
In figuur 2 zie je voor punt $E$ dat $p = 15,3$ en $q = 2,3$.

5p **15** Bereken met deze gegevens de totale tijd die Elvis nodig heeft om de bal te bereiken bij de worp die bij punt $E$ hoort.

Voor elke worp kunnen we de totale tijd die Elvis nodig heeft om de bal te bereiken, berekenen met de formule:

$$T = 0{,}143 \cdot (15 - q) + \sqrt{p^2 + q^2}$$

Hierin is $T$ de totale tijd in seconden en $q$ de afstand $CD$ in meters.

Voor de volgende vraag bekijken we een worp waarbij de afstand $CB = 20$ m, dus $p = 20$. De formule wordt dan:

$$T = 0{,}143 \cdot (15 - q) + \sqrt{400 + q^2}$$

De afgeleide van deze formule is:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q} = -0{,}143 + \frac{q}{\sqrt{400 + q^2}}$$

5p **16** Toon met behulp van differentiëren aan dat deze afgeleide juist is en bereken door deze afgeleide gelijk aan 0 te stellen, na hoeveel meter rennen Elvis het water in moet springen om zo snel mogelijk de bal te bereiken.

We gaan nu weer uit van de formule $T = 0{,}143 \cdot (15 - q) + \sqrt{p^2 + q^2}$ en we bekijken $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q}$. Er geldt:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q} = -0{,}143 + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

4p **17** Laat zien dat door deze afgeleide gelijk aan 0 te stellen de vergelijking $q = 0{,}14p$ ontstaat, waarbij 0,14 is afgerond op twee decimalen.